M KRASNOV

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

М. Л. КРАСНОВ, А. И. КИСЕЛЕВ, Г. И. МАКАРЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задачи и упражнения

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

M. KRASNOV, A. KISSÉLEV, G. MAKARENKO

ÉQUATIONS INTÉGRALES

PROBLÈMES ET EXERCICES

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe par
IRINA PÉTROVA

На французском языке

© с изменениями. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976

© Traduction française Editions Mir 1977

SOMMAIRE

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FREDHOLM

APPLICATION DES TRANSFORMATIONS
INTÉGRALES À LA RÉSOLUTION
D'ÉQUATIONS INTÉGRALES

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE

MÉTHODES DE RÉSOLUTION APPROCHÉE
DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

PRÉLIMINAIRES

1. Une fonction $f(x)$ non négative sur l'intervalle (a, b) est dite *sommable* sur cet intervalle si $\int_a^b f(x)\,dx$ est finie *).

Une fonction $f(x)$ de signe arbitraire est sommable sur (a, b) si et seulement s'il en est de même de la fonction $|f(x)|$, autrement dit, lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est finie.

Dans la suite nous aurons affaire à l'intervalle fondamental $I = (a, b)$ (ou $I_0 = (0, a)$) et au carré fondamental $\Omega\ \{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$ (ou $\Omega_0\ \{0 \leqslant x,\ t \leqslant a\}$).

2. Espace $L_2(a, b)$. On dit qu'une fonction $f(x)$ est *de carré intégrable sur* $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)\,dx$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L_2(a, b)$ ou L_2 tout court.

Propriétés fondamentales des fonctions de L_2

1° Le produit de deux fonctions de carré intégrable est une fonction intégrable.

2° La somme de deux fonctions de L_2 est une fonction de L_2.

3° Si $f(x) \in L_2$ et si λ est un nombre réel quelconque, alors

$$\lambda f(x) \in L_2.$$

4° Si $f(x) \in L_2$ et $g(x) \in L_2$, on a l'inégalité de Bouniakovski-Schwarz

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx. \qquad (1)$$

*) L'intégrale est comprise au sens de Lebesgue, mais le lecteur qui ne connaît pas cette notion peut comprendre partout les intégrales au sens de Riemann.

Le *produit scalaire* de deux fonctions $f(x) \in L_2$, $g(x) \in L_2$ est le nombre

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{2}$$

On appelle *norme* d'une fonction $f(x)$ de L_2 le nombre non négatif

$$\| f \| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}. \tag{3}$$

5° Pour $f(x)$ et $g(x)$ de L_2 on a l'inégalité triangulaire

$$\| f + g \| \leqslant \| f \| + \| g \|. \tag{4}$$

6° Soient $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . ., $f_n(x)$, . . . des fonctions de carré intégrable sur (a, b). Si

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx = 0,$$

on dit que la suite de fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . . *converge en moyenne* ou, plus précisément, *en moyenne quadratique* vers $f(x)$.

Si une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions de L_2 converge uniformément vers $f(x)$, alors $f(x) \in L_2$ et $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne vers $f(x)$.

On dit qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions de L_2 *converge en moyenne vers un de ses propres éléments* si à chaque $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre $N > 0$ tel qu'on ait

$$\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2\, dx \leqslant \varepsilon$$

pour $n > N$ et $m > N$. De telles suites sont appelées *suites de Cauchy*. Pour qu'une suite $\{f_n(x)\}$ converge en moyenne vers une fonction, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy. L'espace L_2 est complet, i.e. toute suite de Cauchy de L_2 converge vers une fonction de L_2.

Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ appartenant à $L_2(a, b)$ sont *équivalentes* sur (a, b) si $f(x) \neq g(x)$ seulement sur un ensemble de mesure nulle. Dans ce cas, on dit que $f(x) = g(x)$ presque partout (p.p.) sur (a, b).

3. Espace $C^{(l)}(a, b)$. Les éléments de cet espace sont toutes les fonctions définies sur $[a, b]$ et possédant sur cet intervalle des dérivées continues jusqu'à l'ordre l inclus. Les opérations d'addition de fonctions et de multiplication de fonctions par un nombre sont définies de façon usuelle.

La *norme* d'un élément $f(x) \in C^{(l)}(a, b)$ se définit par la formule

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{l} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(k)}(x)|,$$

avec $f^{(0)}(x) = f(x)$.

La convergence dans $C^{(l)}(a, b)$ signifie la convergence uniforme aussi bien des suites de fonctions que des suites de leurs dérivées d'ordre k ($k = 1, 2, \ldots, l$).

La notion de fonction sommable s'étend à des espaces pluridimensionnels. Ainsi, une fonction $F(x, t)$ est dite de carré sommable sur $\Omega\ \{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$ si

$$\int_a^b \int_a^b F^2(x, t)\, dx\, dt < +\infty.$$

On définit alors la norme de $F(x, t)$ par l'égalité

$$\|F\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b F^2(x, t)\, dx\, dt}.$$

4. Une fonction $f(z)$ de la variable complexe z qui admet une dérivée en chaque point d'un domaine G du plan de la variable complexe z est dite *analytique* (régulière) dans G.

Une fonction $f(z)$ analytique dans tout le plan ouvert (i.e. privé de point à l'infini) est une fonction *entière*.

Une fonction $f(z)$ est *méromorphe* si on peut la mettre sous forme de quotient de deux fonctions entières :

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \qquad h(z) \not\equiv 0.$$

Une fonction méromorphe n'admet dans tout domaine borné qu'un nombre fini de pôles.

Le point $z = a$ s'appelle *point singulier isolé* de $f(z)$ si $f(x)$ est analytique dans son voisinage $0 < |z - a| < \delta$ et ne l'est pas en $z = a$. Le point singulier isolé $z = a$ est un *pôle* de la fonction $f(z)$ si

$$\lim_{x \to a} f(z) = \infty$$

(sous l'hypothèse que $f(z)$ est uniforme dans un voisinage de $z = a$, $z \neq a$).

Pour que le point $z = a$ soit un pôle de $f(z)$, il faut et il suffit qu'il soit un zéro de la fonction $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$, c'est-à-dire que $\varphi(a) = 0$.

On appelle *ordre* du pôle $z = a$ de la fonction $f(z)$ l'ordre du zéro $z = a$ de la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

5. On appelle *résidu* de $f(z)$ au point singulier isolé $z = a$ le nombre

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)\, dz,$$

où c est une circonférence $|z - a| = \rho$ de rayon suffisamment petit.

Si le point $z = a$ est un pôle d'ordre n de la fonction $f(z)$, on a

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}.$$

Pour un pôle simple ($n = 1$),

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} \{(z - a) f(z)\}.$$

Si $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(a) \neq 0$, et si $\psi(z)$ admet en $z = a$ un zéro du premier ordre, i.e. $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, alors

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

6. Lemme de Jordan. *Si $f(z)$ est continue dans le domaine $|z| \geqslant R_0$, $\operatorname{Im} z \geqslant \alpha$ (α est un nombre réel fixe) et $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$, alors pour tout $\lambda > 0$*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{c_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 0,$$

où c_R est un arc de circonférence $|z| = R$ dans le domaine considéré.

7. Une fonction $f(x)$ est dite *localement sommable* si elle est sommable sur tout ensemble borné.

Soit $\varphi(t)$ une fonction à valeurs complexes de la variable réelle t localement sommable, nulle pour $t < 0$ et vérifiant la condition $|\varphi(t)| < Me^{s_0 t}$ quels que soient t ($M > 0$, $s_0 \geqslant 0$). Cette fonction s'appelle *original* et le nombre s_0 son *indicatrice de croissance*.

Nous appellerons *transformée de Laplace* de $\varphi(t)$ la fonction $\Phi(p)$ de la variable complexe $p = s + i\sigma$ définie par l'égalité

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(t)\, dt$$

Pour tout original $\varphi(t)$ la fonction $\Phi(p)$ est définie dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > s_0$ et est analytique dans ce demi-plan. Le fait que $\Phi(p)$ est la transformée de Laplace de $\varphi(t)$ (ou l'image de $\varphi(t)$ par la transformation de Laplace) se note

$$\varphi(t) \doteqdot \Phi(p).$$

8. **Théorème d'inversion.** *Si* $\varphi(t)$ *est un original et* $\Phi(p)$ *son image, alors*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\Phi(p)\,dp, \qquad \gamma > s_0, \tag{5}$$

l'intégrale étant prise le long de la droite $\operatorname{Re} p = \gamma$ *parallèle à l'axe imaginaire et comprise au sens de la valeur principale*:

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\Phi(p)\,dp = \lim_{\omega\to\infty} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pt}\Phi(p)\,dp.$$

La formule (5) est la *formule d'inversion* de la transformation de Laplace. Si

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

où $M(p)$ et $N(p)$ sont des polynômes en p, le degré de $M(p)$ étant inférieur à celui de $N(p)$, l'original de $\Phi(p)$ est

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p\to a_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{(p-a_k)^{n_k}\Phi(p)\,e^{pt}\},$$

où a_k sont les pôles de $\Phi(p)$, n_k leur ordre et la somme est prise relativement à tous les pôles de $\Phi(p)$.

Dans le cas où tous les pôles a_k ($k = 1, 2, \ldots, l$) de la fonction $\Phi(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ sont simples, on a

$$\frac{M(p)}{N(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{l} \frac{M(a_k)}{N'(a_k)}\, e^{a_k t} = \varphi(t).$$

9. **Théorème du produit.** *Soit* $f(t)$ *et* $\varphi(t)$ *des originaux et*

$$f(t) \doteqdot F(p),$$
$$\varphi(t) \doteqdot \Phi(p).$$

Alors

$$F(p)\cdot\Phi(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

L'intégrale du second membre de (6) s'appelle *produit de convolution* des fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ et se note $f(t) * \varphi(t)$.

Ainsi, le produit des images de deux fonctions est encore une image, à savoir l'image du produit de convolution des originaux

$$F(p) \cdot \Phi(p) \doteq f(t) * \varphi(t).$$

10. Soit $f(x)$ une fonction absolument intégrable sur tout l'axe $-\infty < x < +\infty$. La fonction

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \quad \left(\text{ou } \tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx\right)$$

s'appelle *transformée de Fourier de* $f(x)$.

La *formule d'inversion* pour la transformation de Fourier s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

$$\left(\text{ou } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda\right).$$

Pour que les formules donnant la transformation de Fourier et la transformation inverse soient plus symétriques, on les écrit souvent comme suit :

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA

§ 1. Notions fondamentales

Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

où $f(x)$, $K(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre numérique, est appelée *équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce*. La fonction $K(x, t)$ est le *noyau* de l'équation de Volterra. Si $f(x) \equiv 0$, l'équation (1) s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{2}$$

et s'appelle équation *homogène* de Volterra de seconde espèce.

Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\int_a^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{3}$$

est appelée *équation intégrale de Volterra de première espèce*. Nous supposerons dans la suite que la limite inférieure a est égale à zéro, ce qui ne réduira nullement la généralité des résultats.

On appelle *solution* de l'équation intégrale (1), (2) ou (3) une fonction $\varphi(x)$ qui, dès qu'elle est portée dans cette équation, la change en identité (en x).

Exemple 1. Montrer que la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ est solution de l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\, \varphi(t)\, dt. \tag{4}$$

Solution. Substituant la fonction $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ à $\varphi(x)$ dans le second membre de (4), nous obtenons

$$\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\,\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=\varphi(x).$$

Ainsi, en faisant $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ dans les deux membres de (4), cette dernière équation devient une identité en x:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\equiv\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Or, par définition, cela signifie que $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ est solution de l'équation intégrale (4).

Vérifier que les fonctions suivantes sont solutions des équations intégrales correspondantes:

1. $\varphi(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$;

$$\varphi(x)=\frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2}-\int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2}\,\varphi(t)\,dt.$$

2. $\varphi(x)=e^x(\cos e^x-e^x\sin e^x)$;

$$\varphi(x)=(1-xe^{2x})\cos 1-e^{2x}\sin 1+\int_0^x [1-(x-t)e^{2x}]\,\varphi(t)\,dt.$$

3. $\varphi(x)=xe^x$; $\quad\varphi(x)=e^x\sin x+2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

4. $\varphi(x)=x-\frac{x^3}{6}$; $\quad\varphi(x)=x-\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

5. $\varphi(x)=1-x$; $\quad\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x.$

6. $\varphi(x)=3$; $\quad x^3=\int_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

7. $\varphi(x) = \frac{1}{2}$; $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = \sqrt{x}$.

8. $\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}$; $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = 1$.

REMARQUE. Les équations intégrales de Volterra interviennent dans des problèmes de physique où il existe une direction privilégiée de variation de la variable indépendante (par exemple, du temps, de l'énergie, . . .).

Exemple 2. Considérons un faisceau de rayons X traversant une substance suivant l'axe OX et admettons que le faisceau n'est pas dévié. Soit un ensemble de rayons de longueur d'onde donnée. Lorsque les rayons traversent une couche de substance d'épaisseur dx, une partie en est absorbée et la longueur d'onde d'autres change par suite de la diffusion. D'autre part, l'ensemble en question acquiert des rayons qui ont possédé primitivement une énergie plus élevée (i.e. une longueur d'onde λ moindre) et qui en perdent une partie à cause de la diffusion. Si la fonction $f(\lambda, x)\,d\lambda$ définit donc l'ensemble de rayons de longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$, alors

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x} = -\mu f(\lambda, x) + \int_0^\lambda P(\lambda, \tau)\, f(\tau, x)\, d\tau,$$

où μ est le coefficient d'absorption et $P(\lambda, \tau)\,d\tau$ la probabilité pour qu'un rayon de longueur d'onde τ acquière, après avoir traversé une couche d'épaisseur unité, une longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$.

Nous avons obtenu une *équation intégro-différentielle*, i.e. une équation telle que la fonction inconnue $f(\lambda, x)$ y figure sous le signe de dérivation et $\int$.

En posant

$$f(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-px}\psi(\lambda, p)\,dp,$$

avec $\psi(\lambda, p)$ la nouvelle fonction inconnue, nous établirons que celle-ci vérifie l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\psi(\lambda, p) = \frac{1}{\mu - p}\int_0^\lambda P(\lambda, \tau)\,\psi(\tau, p)\,d\tau.$$

§ 2. Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)\,y = F(x) \tag{1}$$

à coefficients continus $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \tag{2}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\,y = F(x), \tag{1'}$$

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \tag{2'}$$

Posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{3}$$

D'où, vu les conditions initiales (2'), on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\,dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt + C_1 x + C_0. \tag{4}$$

Nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Compte tenu de (3) et (4) mettons l'équation différentielle (1') sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\,\varphi(t)\,dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)\,(x-t)\,\varphi(t)\,dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x)$$

ou

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)\,(x-t)]\,\varphi(t)\,dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x). \tag{5}$$

Posant

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x - t)], \tag{6}$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x), \tag{7}$$

nous ramenons l'équation (5) à la forme suivante:

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt + f(x), \tag{8}$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

L'unicité de la solution de (8) résulte de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1′)-(2′) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point $x = 0$.

Inversement, en résolvant l'équation intégrale (8) avec K et f définis par les formules (6) et (7), puis portant $\varphi(x)$ obtenue dans la dernière équation (4), nous obtenons la solution de (1′) vérifiant les conditions initiales (2′).

Exemple 1. Former l'équation intégrale correspondant à l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0$$

et aux conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solution. Posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{9}$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\,dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)\,dt, \qquad y = \int_0^x (x - t)\,\varphi(t)\,dt + 1. \tag{10}$$

Portons (9) et (10) dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)\,dt + \int_0^x (x - t)\,\varphi(t)\,dt + 1 = 0$$

ou

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x - t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Former les équations intégrales associées aux équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données :

9. $y'' + y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

10. $y' - y = 0;\ y(0) = 1.$

11. $y'' + y = \cos x;\ y(0) = y'(0) = 0.$

12. $y'' - 5y' + 6y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

13. $y'' + y = \cos x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

14. $y'' - y' \sin x + e^x y = x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

15. $y'' + (1 + x^2)\, y = \cos x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

16. $y''' + xy'' + (x^2 - x)\, y = xe^x + 1;\ y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$

17. $y''' - 2xy = 0;\quad y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = y''(0) = 1.$

18. Montrer que, quelles que soient les conditions initiales, une équation différentielle linéaire à coefficients constants peut être ramenée à une équation intégrale de Volterra de seconde espèce dont le noyau n'est fonction que de la différence des arguments $(x - t)$ (équation de convolution).

On résout certaines équations de Volterra de première et de seconde espèce en les ramenant à des équations différentielles.

Exemple 2. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = x + \int_0^x xt\varphi(t)\, dt. \tag{11}$$

Solution. Mettons l'équation (11) sous la forme

$$\varphi(x) = x\left(1 + \int_0^x t\varphi(t)\, dt\right) \tag{12}$$

et posons

$$y(x) = 1 + \int_0^x t\varphi(t)\, dt. \tag{13}$$

Dérivons la dernière égalité :

$$y'(x) = x\varphi(x).$$

Comme, selon (12) et (13),

$$\varphi(x) = xy(x),$$

nous obtenons une équation différentielle par rapport à $y(x)$:

$$y'(x) = x^2 y(x).$$

Sa solution générale s'écrit

$$y(x) = Ce^{\frac{x^3}{3}}.$$

En vertu de (13), nous avons $y(0) = 1$, donc $C = 1$. Ainsi, la solution $\varphi(x) = xy(x)$ de l'équation (11) a la forme

$$\varphi(x) = xe^{\frac{x^3}{3}}.$$

Résoudre par dérivation les équations intégrales suivantes:

19. $\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

20. $\int_0^x e^{x+t}\varphi(t)\,dt = x.$

21. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x.$

22. $\varphi(x) = 2\int_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2}\varphi(t)\,dt + 1.$

23. $\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt + e^x.$

§ 3. Résolvante de l'équation intégrale de Volterra. Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,td, \qquad (1)$$

où $K(x, t)$ est une fonction continue pour $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$, et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leqslant x \leqslant a$.

Cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série entière illimitée suivant les puissances de λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots \quad (2)$$

Portons formellement cette série dans (1), il vient

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots =$$

$$= f(x) + \lambda\int_0^x K(x, t)\,[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(t) + \ldots]\,dt.$$

En procédant par identification nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = f(x),\\
&\varphi_1(x) = \int_0^x K(x, t)\,\varphi_0(t)\,dt = \int_0^x K(x, t)\,f(t)\,dt,\\
&\varphi_2(x) = \int_0^x K(x, t)\,\varphi_1(t)\,dt = \qquad (3)\\
&\qquad = \int_0^x K(x, t)\int_0^t K(t, t_1)\,f(t_1)\,dt_1\,dt,\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Moyennant les relations (3) on peut définir successivement les fonctions $\varphi_n(x)$. On montre que, sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $K(x, t)$, la série (2) ainsi obtenue converge uniformément en x et λ pour tout λ et $x \in [0, a]$ et que sa somme est la solution de l'équation (1).

Ensuite, (3) entraîne

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x, t)\,f(t)\,dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x, t)\left[\int_0^t K(t, t_1)\,f(t_1)\,dt_1\right]dt =$$

$$= \int_0^x f(t_1)\,dt_1\int_{t_1}^x K(x, t)\,K(t, t_1)\,dt = \int_0^x K_2(x, t_1)\,f(t_1)\,dt_1,$$

où

$$K_2(x, t_1) = \int_{t_1}^x K(x, t)\,K(t, t_1)\,dt.$$

On établit de façon analogue qu'en général

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x, t)\,f(t)\,dt \qquad (n = 1, 2 \ldots). \qquad (4)$$

Les fonctions $K_n(x, t)$ s'appellent *noyaux itérés* et sont définies, on le montre aisément, par les formules de récurrence

$$K_1(x, t) = K(x, t),$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_n(z, t)\, dz \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Compte tenu de (4) et (5) l'égalité (2) peut s'écrire

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \int_0^x K_\nu(x, t) f(t)\, dt.$$

Une fonction $R(x, t; \lambda)$ définie par la série

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu K_{\nu+1}(x, t) \tag{6}$$

est la *résolvante* (ou le *noyau résolvant*) de l'équation intégrale (1). Si le noyau $K(x, t)$ est continu, la série (6) converge absolument et uniformément.

Les noyaux itérés et la résolvante sont indépendants de la limite inférieure de l'intégrale dans l'équation intégrale.

La résolvante $R(x, t; \lambda)$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_t^x K(x, s) R(s, t; \lambda)\, ds.$$

La solution de l'équation intégrale (1) en fonction de la résolvante s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t)\, dt \tag{7}$$

(voir [11], [18]).

Exemple 1. Trouver la résolvante de l'équation intégrale de Volterra à noyau $K(x, t) \equiv 1$.

Solution. On a $K_1(x, t) = K(x, t) = 1$. Conformément aux formules (5),

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_1(z, t)\, dz = \int_t^x dz = x - t,$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x 1 \cdot (z - t)\, dz = \frac{(x-t)^2}{2!},$$

$$K_4(x, t) = \int_t^x 1 \cdot \frac{(z-t)^2}{2}\, dz = \frac{(x-t)^3}{3!}.$$

. . . . . .

$$K_n(x, t) = \int_t^x 1 \cdot K_{n-1}(z, t)\, dz =$$

$$= \int_t^x 1 \cdot \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}\, dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ainsi, par définition,

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.$$

Trouver les résolvantes des équations intégrales de Volterra à noyau suivant:

24. $K(x, t) = x - t$.

25. $K(x, t) = e^{x-t}$.

26. $K(x, t) = e^{x^2-t^2}$.

27. $K(x, t) = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}$.

28. $K(x, t) = \dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$.

29. $K(x, t) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}$.

30. $K(x, t) = a^{x-t}$ $(a > 0)$.

Supposons que le noyau $K(x, t)$ est un polynôme de degré $n-1$ en t et qu'il peut donc s'écrire

$$K(x, t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \qquad (8)$$

les coefficients $a_k(x)$ étant continus dans $[0, a]$. En définissant une fonction $g(x, t; \lambda)$ comme solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\, g\right] = 0, \qquad (9)$$

qui vérifie les conditions

$$g\Big|_{x=t} = \frac{dg}{dx}\Big|_{x=t} = \ldots = \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\Big|_{x=t} = 0, \quad \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\Big|_{x=t} = 1, \qquad (10)$$

la résolvante $R(x, t; \lambda)$ sera définie par l'égalité

$$R(x, t; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, t; \lambda)}{dx^n}. \tag{11}$$

De même, si

$$K(x, t) = b_0(t) + b_1(t)(t-x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1},$$

la résolvante est définie par

$$R(x, t; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(t, x; \lambda)}{dt^n},$$

où $g(x, t; \lambda)$ est la solution de l'équation

$$\frac{d^n g}{dt^n} + \lambda \left[b_0(t) \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(t) g \right] = 0,$$

qui vérifie les conditions (10) (voir [11]).

Exemple 2. Trouver la résolvante de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt.$$

Solution. Dans ce cas, $K(x, t) = x - t$; $\lambda = 1$; par conséquent, selon (8), $a_1(x) = 1$, les $a_k(x)$ restants étant nuls.

L'équation (9) est alors de la forme

$$\frac{d^2 g(x, t; 1)}{dx^2} - g(x, t; 1) = 0,$$

d'où

$$g(x, t; 1) = g(x, t) = C_1(t) e^x + C_2(t) e^{-x}.$$

Les conditions (10) donnent

$$\begin{cases} C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-t} = 0, \\ C_1(t) e^t - C_2(t) e^{-t} = 1. \end{cases} \tag{12}$$

En résolvant le système (12) nous obtenons

$$C_1(t) = \frac{1}{2} e^{-t}, \qquad C_2(t) = -\frac{1}{2} e^t,$$

et donc

$$g(x, t) = \frac{1}{2} (e^{x-t} - e^{-(x-t)}) = \operatorname{sh}(x-t).$$

Conformément à (11),

$$R(x, t; 1) = [\operatorname{sh}(x-t)]''_x = \operatorname{sh}(x-t).$$

Trouver les résolvantes des équations intégrales à noyau suivant ($\lambda = 1$) :

31. $K(x, t) = 2 - (x - t)$.

32. $K(x, t) = -2 + 3(x - t)$.

33. $K(x, t) = 2x$.

34. $K(x, t) = -\frac{4x-2}{2x+1} + \frac{8(x-t)}{2x+1}$.

35. Soit l'équation intégrale de Volterra telle que son noyau ne dépende que de la différence de ses arguments :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (\lambda = 1). \tag{13}$$

Montrer qu'il en est de même de tous les noyaux itérés et de la résolvante de l'équation (13).

Exemple 3. Trouver à l'aide de la résolvante la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt.$$

Solution. Pour $\lambda = 1$, la résolvante relative au noyau $K(x, t) = e^{x^2-t^2}$ est $R(x, t; 1) = e^{x-t}e^{x^2-t^2}$ (voir Exercice 26). D'après la formule (7), l'équation intégrale donnée a pour solution la fonction

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t}e^{x^2-t^2}e^{t^2}\,dt = e^{x+x^2}.$$

Utiliser les résultats précédents et les résolvantes pour trouver les solutions des équations intégrales suivantes :

36. $\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$.

37. $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$.

38. $\varphi(x) = x3^x - \int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\,dt$.

39. $\varphi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\,\varphi(t)\,dt$.

40. $\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt.$

41. $\varphi(x) = e^{x^2+2x} + 2\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt.$

42. $\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}\varphi(t)\,dt.$

REMARQUE. L'unicité de la solution des équations intégrales de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt \tag{14}$$

est assurée dans des hypothèses sensiblement plus larges sur la fonction $f(x)$ et les noyaux $K(x,\ t)$ que leur continuité.

THÉORÈME. *L'équation intégrale de Volterra de seconde espèce* (14), *dont les noyaux* $K(x,\ t)$ *et la fonction* $f(x)$ *appartiennent respectivement à* $L_2(\Omega_0)$ *et à* $L_2(0,\ a)$, *admet une solution et une seule dans* $L_2(0,\ a)$.

Cette solution est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x R(x,\ t;\ \lambda)\,f(t)\,dt,$$

où la résolvante $R(x,\ t;\ \lambda)$ est définie par la série

$$R(x,\ t;\ \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu}K_{\nu+1}(x,\ t)$$

de noyaux itérés qui converge presque partout.

43. Montrer que l'équation

$$\varphi(x) = \int_0^x t^{x-t}\varphi(t)\,dt \qquad (0\leqslant x,\ t\leqslant 1)$$

possède, en plus de la solution continue $\varphi(x) \equiv 0$, une infinité de solutions discontinues de la forme

$$\varphi(x) = Cx^{x-1}$$

avec C une constante arbitraire.

§ 4. Intégrales eulériennes

On appelle *fonction gamma eulérienne* (ou intégrale eulérienne de seconde espèce) une fonction $\Gamma(x)$ définie par l'égalité

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt, \tag{1}$$

où x est un nombre complexe quelconque, Re $x > 0$. Pour $x = 1$, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1. \tag{2}$$

En intégrant par parties on trouve à partir de (1):

$$\Gamma'(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \tag{3}$$

Cette égalité exprime la propriété fondamentale de la fonction gamma:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{4}$$

Utilisons (2), il vient

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!,$$
$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!,$$

et en général pour n entier positif

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{5}$$

Il est connu que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Posons $x = t^{1/2}$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

Compte tenu de l'expression (1) de la fonction gamma, la dernière égalité s'écrit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

D'où, moyennant la propriété fondamentale de la fonction gamma donnée par (4),

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi},\ \text{et ainsi de suite.}$$

D'une façon générale, on vérifie sans peine que l'égalité

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

(n entier positif) est valable.

Connaissant la valeur de la fonction gamma pour une valeur de l'argument, on calcule, à l'aide de (3), sa valeur pour l'argument diminué d'une unité. Par exemple,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}.$$

On trouve de même

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi},\ \text{et ainsi de suite.}$$

On vérifie aisément que $\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\ldots=\Gamma(-n)=\ldots=\infty$. Plus haut nous avons défini $\Gamma(x)$ pour $\operatorname{Re} x>0$. Le procédé de calcul indiqué prolonge $\Gamma(x)$ dans le demi-plan de gauche où cette fonction est définie partout sauf aux points $x=-n$ (n est entier positif et 0).

Citons encore les relations suivantes:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x),$$

en général

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=$$
$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx)$$

(*théorème du produit de Gauss et Legendre*).

La fonction gamma a été définie par Weierstrass moyennant l'équation

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}, \tag{6}$$

où

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right)=0{,}57721\ldots$$

est la constante d'Euler. L'égalité (6) montre que $\Gamma(z)$ est analytique partout sauf aux points $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, . . ., où elle admet des pôles simples.

Donnons la formule d'Euler obtenue à partir de (6):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\},$$

qui a lieu partout, sauf en $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, . . .

44. Montrer que $\Gamma'(1)=-\gamma$.

45. Montrer que, lorsque $\operatorname{Re} z>0$,

$$\Gamma(z)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx.$$

46. Montrer que

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=2\ln 2.$$

47. Démontrer la formule

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\,n^{z}.$$

Introduisons l'intégrale eulérienne de première espèce $B(p, q)$ ou *fonction bêta eulérienne*:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (\operatorname{Re}p>0,\quad \operatorname{Re}q>0).$$

On a l'égalité suivante exprimant le lien entre les intégrales eulériennes de première et de seconde espèce:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

48. Montrer que

$$B(p, q) = B(q, p).$$

49. Montrer que

$$B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1).$$

50. Montrer que

$$B(p+1, q) = \frac{p}{q} B(p, q+1).$$

51. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx = 2^{p+q-1} B(p, q).$$

52. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} x \cdot \sin^{n-1} x\, dx \qquad (\mathrm{Re}\, m > 0,\ \mathrm{Re}\, n > 0).$$

§ 5. Equation intégrale d'Abel et sa généralisation

On appelle *équation intégrale d'Abel* une équation de la forme

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt = f(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue et $f(x)$ une fonction donnée. C'est une équation intégrale de Volterra de première espèce.

On appelle également équation d'Abel une équation plus générale:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt = f(x), \tag{2}$$

où α est une constante, $0 < \alpha < 1$ (*équation d'Abel généralisée*). La fonction $f(x)$ sera supposée possédant une dérivée continue sur un segment $[0, a]$. Notons que pour $\alpha \geqslant 1/2$, le noyau de l'équation (2) n'est pas de carré intégrable, i.e. il n'est pas une fonction de L_2. Cependant l'équation (2) admet une solution qui peut être cherchée comme suit.

Admettons que l'équation (2) possède bien une solution. Substituons s à x dans (2), multiplions membre à membre par $\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ et intégrons par rapport à s entre 0 et x :

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha}}\, dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds.$$

Intervertissons l'ordre d'intégration dans le premier membre, il vient

$$\int_0^x \varphi(t)\, dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = F(x), \tag{3}$$

où

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds.$$

Faisons la substitution $s = t + y\,(x - t)$ dans l'intégrale intérieure:

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{\alpha}(1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

L'équation (3) entraîne alors

$$\int_0^x \varphi(t)\, dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F(x)$$

ou

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds \right)'_x. \tag{4}$$

Ainsi, la solution unique de (3) est donnée par la formule (4) que l'on récrit en intégrant par parties :

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds \right]. \tag{5}$$

53. a) Montrer que si $f(x) \equiv C = \text{const}$, l'équation d'Abel (1) a pour solution une cycloïde. (Problème du tautochrone : déterminer une courbe telle qu'un mobile pesant qui la parcourt sans frottement, arrive au point le plus bas au bout d'un temps indépendant de sa position initiale.)

b) Montrer que dans le cas $f(x) = C/\sqrt{x}$ la solution de l'équation d'Abel est des droites.

Résoudre les équations intégrales suivantes:

54. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = x^n \qquad (0<\alpha<1).$

55. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \sin x.$

56. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = e^x.$

57. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = x^{\frac{1}{2}}.$

58. Résoudre l'équation d'Abel à deux dimensions

$$\iint\limits_D \frac{\varphi(x,\ y)\,dx\,dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}} = f(x_0,\ y_0).$$

Ici le domaine D est un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse coïncide avec l'axe OX et le sommet avec le point $(x_0,\ y_0)$.

Considérons l'équation intégrale (voir [24])

$$\int\limits_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)\,dt = x^\lambda \tag{6}$$

($\lambda \geqslant 0$, $\beta > -1$ réel) qui généralise dans un certain sens l'équation d'Abel (2).

Multiplions les deux membres de (6) par $(z-x)^\mu$ ($\mu > -1$) et intégrons par rapport à x de 0 à z:

$$\int\limits_0^z (z-x)^\mu \left(\int\limits_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)\,dt \right) dx = \int\limits_0^z x^\lambda (z-x)^\mu\,dx. \tag{7}$$

Posons $x = \rho z$ dans l'intégrale de droite, il vient

$$\int\limits_0^z x^\lambda (z-x)^\mu\,dx = z^{\lambda+\mu+1} \int\limits_0^1 \rho^\lambda (1-\rho)^\mu\,d\rho = z^{\lambda+\mu+1} \mathrm{B}(\lambda+1,\ \mu+1) =$$

$$= z^{\lambda+\mu+1} \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} \qquad (\lambda+\mu+1 > \lambda \geqslant 0). \tag{8}$$

En changeant l'ordre d'intégration dans le premier membre de (7) nous trouvons

$$\int_0^z \left(\int_0^x (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta} \varphi(t)\, dt \right) dx = \int_0^z \left(\int_t^z (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta} dx \right) \varphi(t)\, dt. \tag{9}$$

Posons $x = t + \rho(z-t)$ dans l'intégrale intérieure du second membre de l'égalité précédente. Alors

$$\int_t^z (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta} dx = (z-t)^{\mu+\beta+1} \int_0^1 \rho^{\beta} (1-\rho)^{\mu} d\rho =$$

$$= (z-t)^{\mu+\beta+1} B(\beta+1, \mu+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} (z-t)^{\beta+\mu+1}. \tag{10}$$

Compte tenu de (8), (9), (10), nous obtenons à partir de (7)

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} \int_0^z (z-t)^{\mu+\beta+1} \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} z^{\lambda+\mu+1}. \tag{11}$$

Choisissons μ tel que $\mu + \beta + 1 = n$, entier non négatif. L'équation (11) entraîne alors

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^z (z-t)^n \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}$$

ou

$$\int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}. \tag{12}$$

Dérivons les deux membres de (12) $n+1$ fois par rapport à z, il vient

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)\ \ldots\ (\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda-\beta-1}$$

ou, pour $\lambda - \beta + k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$,

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)} z^{\lambda-\beta-1}. \tag{13}$$

C'est bien la solution de l'équation intégrale (6).

Exemple. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^x (x-t) \varphi(t)\, dt = x^2.$$

Solution. En l'occurrence, $\beta = 1$, $\lambda = 2$. Puisque $\lambda - \beta + k \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), d'après la formule (13)

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\,\Gamma(1)}\, x^{2-1-1} = 2.$$

Résoudre les équations intégrales suivantes:

59. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}} \varphi(t)\, dt = x^{\frac{4}{3}} - x^2.$

60. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} \varphi(t)\, dt = \pi x.$

61. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{4}} \varphi(t)\, dt = x + x^2.$

62. $\int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\, dt = x^3.$

63. $\frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\, dt = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$

CHAPITRE II

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FREDHOLM

§ 6. Notions fondamentales

On appelle *équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce* une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $K(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle (a, b) et λ un facteur numérique.

La fonction $K(x, t)$ est le *noyau de l'équation intégrale* (1); on suppose que le noyau $K(x, t)$ est défini dans le carré $\Omega\ \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$ du plan (x, t) et continu dans Ω, ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2\, dx dt$$

soit finie.

Si $f(x) \not\equiv 0$, l'équation (1) est dite *non homogène*, dans le cas contraire, l'équation intégrale (1) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0, \tag{2}$$

et on dit qu'elle est *homogène*.

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{3}$$

où la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle *équation intégrale de Fredholm de première espèce*.

Les bornes a et b dans les équations (1), (2) et (3) peuvent être aussi bien finies qu'infinies.

On appelle *solution* des équations intégrales (1), (2) et (3) toute fonction $\varphi(x)$ telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x \in (a, b)$.

Exemple 1. Problème de répartition de la luminance.
Selon la loi de l'optique géométrique, l'image d'un objet est semblable à l'objet, si bien que l'image d'un segment est un segment, leurs longueurs étant en général différentes.

Etant donné le système optique d'un dispositif P, choisissons les unités de mesure sur les axes Ot et $O's$ de façon que pour deux points $T(t)$ et $S(s)$ qui se correspondent, on ait $s = t$ (fig. 1).

Le point lumineux $T(t)$ de l'objet AB influe sur l'éclairement de tous les points de l'image $A'B'$, mais celui du point $S(s)$ est le

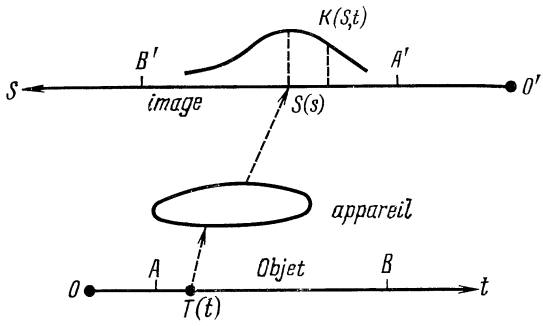

Fig. 1

plus grand. Ainsi, l'éclairement K est une fonction de s et de t, i.e. $K = K(s, t)$.

Désignons par $\eta(t)$ la luminance de l'objet en t. La quantité $\eta(t)\, K(s, t)\Delta t$ donne alors une valeur approchée de la luminance de l'image au point $S(s)$ engendrée par l'élément Δt de l'objet lumineux. Ici $K(s, t)$ est défini par les propriétés optiques du dispositif. En vertu du principe de superposition, la luminance de l'image au point $S(s)$ est approximativement donnée par la somme

$$\sum_k \eta(t_k)\, K(s, t_k)\, \Delta t_k, \tag{4}$$

où la sommation s'étend sur tout l'objet (le segment AB). Soit l la longueur de ce segment. Passant à la limite dans (4) pour $\max \Delta t_k \to 0$, on obtient une répartition de la luminance de l'image de la forme

$$g(s) = \int_0^l K(s, t)\, \eta(t)\, dt. \tag{5}$$

Selon la façon dont on pose le problème, on obtient à partir de (5) des équations intégrales de divers types. La fonction connue $K(s, t)$ est définie par le choix du dispositif. Si on s'est donné la luminance

de l'image $g(s)$ et qu'on cherche une répartition de la luminance de l'objet telle qu'elle fournisse la luminance donnée de l'image, alors $g(s)$ est une fonction donnée et $\eta(s)$ la fonction inconnue, et l'équation (5) est donc une équation intégrale de Fredholm de première espèce.

La question suivante est très importante en physique : dans quelles conditions, l'image est telle qu'on ait, à part la similitude géométrique de l'objet et de l'image, la similitude de leurs luminances? Dans ce cas $g(s)$ et $\eta(s)$ sont proportionnels, i.e.

$$g(s) = \frac{1}{\lambda}\eta(s),$$

et en substituant $\varphi(s)$ à $g(s)$ l'équation (5) devient

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_0^l K(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

i.e. une équation intégrale homogène de Fredholm de seconde espèce où $\varphi(s)$ est la fonction inconnue. On se demande alors : le coefficient de proportionnalité peut-il être quelconque? et, dans la négative, pour quelles valeurs de λ le problème physique admet-il une solution?

Modifions la position physique du problème et exigeons que la différence entre la luminance d'un point de l'objet et celle du point correspondant de l'image ait partout une valeur $f(s)$ donnée à l'avance, i.e.

$$\eta(s) - g(s) = f(s). \tag{6}$$

L'équation (5), où on a porté $g(s)$ de (6), devient alors

$$f(s) = \eta(s) - \int_0^l K(s, t)\,\eta(t)\,dt,$$

c'est-à-dire une équation non homogène de Fredholm de seconde espèce, où la fonction inconnue est $\eta(s)$.

Exemple 2. Montrer que la fonction $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ est solution de l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x}{2},$$

où le noyau est de la forme

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Solution. Mettons le premier membre sous la forme suivante :

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt+\int_x^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\,\varphi(t)\,dt+\int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\,\varphi(t)\,dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{2-x}{2}\int_0^x t\varphi(t)\,dt+\frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)\,\varphi(t)\,dt\right\}.$$

Portons dans l'expression obtenue $\sin\frac{\pi x}{2}$ au lieu de $\varphi(x)$, il vient

$$\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x t\,\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}\,dt+x\int_x^1 (2-t)\,\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}\,dt\right\}=$$

$$=\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=x}+\right.$$

$$\left.+x\left[-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right]\Big|_{t=x}^{t=1}\right\}=\frac{x}{2}.$$

Ainsi, on a $\frac{x}{2}\equiv\frac{x}{2}$, ce qui signifie par définition que $\varphi(x)=$ $=\sin\frac{\pi x}{2}$ est solution de l'équation intégrale donnée.

Vérifier si les fonctions données sont solutions des équations intégrales qui les suivent :

64. $\varphi(x)=1$; $\varphi(x)+\int_0^1 x\,(e^{xt}-1)\,\varphi(t)\,dt=e^x-x$.

65. $\varphi(x)=2e^x\left(x-\frac{1}{3}\right)$; $\varphi(x)+2\int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)\,dt=2xe^x$.

66. $\varphi(x)=1-\frac{2\sin x}{1-\frac{\pi}{2}}$; $\varphi(x)-\int_0^\pi \cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=1$.

67. $\varphi(x)=\sqrt{x}$;

$$\varphi(x)-\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\sqrt{x}+\frac{x}{15}(4x^{3/2}-7),$$

$$K(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

68. $\varphi(x)=e^x$; $\varphi(x)+\lambda\int_0^1 \sin xt\,\varphi(t)\,dt=1$.

69. $\varphi(x)=\cos x$;

$$\varphi(x)-\int_0^{\pi}(x^2+t)\cos t\,\varphi(t)\,dt=\sin x.$$

70. $\varphi(x)=xe^{-x}$;

$$\varphi(x)-4\int_0^{\infty} e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt=(x-1)\,e^{-x}.$$

71. $\varphi(x)=\cos 2x$;

$$\varphi(x)-3\int_0^{\pi} K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\cos x,$$

$$K(x,\ t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \sin t\cos x, & t\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

72. $\varphi(x)=\dfrac{4C}{\pi}\sin x$, où C est une constante arbitraire;

$$\varphi(x)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\sin x\,\frac{\sin^2 t}{t}\,\varphi(t)\,dt=0.$$

§ 7. Méthode de Fredholm

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

est donnée par la formule

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,\ t;\ \lambda)\,f(t)\,dt, \tag{2}$$

où la fonction $R(x, t; \lambda)$, dite *résolvante de Fredholm* de l'équation (1), est définie par l'égalité

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} \tag{3}$$

sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x, t; \lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissances de λ :

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n, \tag{4}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, \tag{5}$$

avec les coefficients ainsi définis :

$$B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t) & K(t_2, t_1) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n, \tag{6}$$

et

$$B_0(x, t) = K(x, t),$$

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n) \\ K(t_3, t_1) & K(t_3, t_2) & \dots & K(t_3, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n. \tag{7}$$

Les fonctions $D(\lambda)$ et $D(x, t; \lambda)$ sont respectivement le *déterminant de Fredholm* et le *mineur du déterminant de Fredholm*. Si le noyau $K(x, t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt$$

est finie, les séries (4) et (5) convergent quel que soit λ et sont donc des fonctions analytiques entières de λ.

La résolvante

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

est une fonction analytique de λ, sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$. Ces derniers sont pôles de la résolvante $R(x, t; \lambda)$.

Exemple 1. A l'aide des déterminants de Fredholm trouver la résolvante du noyau $K(x, t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$.

Solution. On a $B_0(x, t) = xe^t$. Ensuite,

$$B_1(x, t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0,$$

$$B_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = 0,$$

puisque les déterminants sous $\int$ sont nuls. Il est évident que tous les $B_n(x, t)$ suivants sont nuls eux aussi. Trouvons les coefficients C_n :

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1, t_1)\, dt_1 = \int_0^1 t_1e^{t_1}\, dt_1 = 1,$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = 0.$$

Evidemment, tous les C_n suivants sont nuls.

Dans notre cas, nous avons conformément aux formules (4) et (5) :

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) = xe^t, \qquad D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

Donc

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1-\lambda}.$$

Appliquons le résultat obtenu à l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xe^t \varphi(t)\, dt = f(x) \qquad (\lambda \neq 1)$$

D'après la formule (2),

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1-\lambda} f(t)\, dt.$$

En particulier, nous obtenons pour $f(x) = e^{-x}$

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda} x.$$

73. Montrer que dans le cas de l'équation

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)\, dt,$$

le déterminant de Fredholm s'écrit

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3},$$

et le mineur du déterminant de Fredholm

$$D(x,\ t;\ \lambda) = xt.$$

74. Montrer que pour l'équation

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2)\, \varphi(t)\, dt$$

on a

$$D(\lambda) = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2,$$

$$D(x,\ t;\ \lambda) = xt + t^2 + \lambda\left(\frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{3}xt - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{4}t\right).$$

75. Montrer que si

$$K(x,\ t) = f_1(x)\, f_2(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, dx = A,$$

alors

$$D(\lambda) = 1 - \lambda A, \quad D(x,\ t;\ \lambda) = f_1(x)\, f_2(t),$$

et la solution de l'équation intégrale non homogène associée avec le second membre $f(x)$ a la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - \lambda A} \int_a^b f(t)\, f_2(t)\, dt.$$

76. Montrer que si

$$K(x,\ t) = f_1(x)\, g_1(t) + f_2(x)\, g_2(t),$$

$D(\lambda)$ est un polynôme du second degré en λ en général, si

$$K(x,\ t) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)\, g_m(t),$$

alors $D(\lambda)$ est un polynôme de degré n en λ.

Utiliser les déterminants de Fredholm et trouver la résolvante des noyaux suivants :

77. $K(x,\ t) = 2x - t;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

78. $K(x,\ t) = x^2 t - xt^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

79. $K(x,\ t) = \sin x \cos t;\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

80. $K(x,\ t) = \sin x - \sin t;\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

Le calcul des coefficients $B_n(x, t)$ et C_n des séries (4) et (5) par les formules (6) et (7) n'est possible que dans des cas très rares, mais ces formules entraînent les relations de récurrence suivantes :

$$B_n(x, t) = C_n K(x, t) - n \int_a^b K(x, s) B_{n-1}(s, t)\, ds, \tag{8}$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s, s)\, ds. \tag{9}$$

Sachant que $C_0 = 1$ et $B_0(x, t) = K(x, t)$, les formules (9) et (8) permettent de trouver de proche en proche C_1, $B_1(x, t)$, C_2, $B_2(x, t)$, C_3, et ainsi de suite.

Exemple 2. Moyennant les formules (8) et (9) trouver la résolvante du noyau $K(x, t) = x - 2t$, où $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Solution. On a $C_0 = 1$, $B_0(x, t) = x - 2t$. Utilisons la formule (9), il vient

$$C_1 = \int_0^1 (-s)\, ds = -\frac{1}{2}.$$

En vertu de la formule (8) nous obtenons

$$B_1(x, t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t)\, ds = -x - t + 2xt + \frac{2}{3}.$$

Ensuite,

$$C_2 = \int_0^1 \left(-2s + 2s^2 + \frac{2}{3}\right) ds = \frac{1}{3},$$

$$B_2(x, t) = \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2s)\left(-s - t + 2st + \frac{2}{3}\right) ds = 0,$$

$$C_3 = C_4 = \ldots = 0, \qquad B_3(x, t) = B_4(x, t) = \ldots = 0.$$

Donc

$$D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}, \qquad D(x, t; \lambda) = x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda.$$

La résolvante cherchée est

$$R(x, t; \lambda) = \frac{x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}.$$

Utilisant les relations de récurrence (8) et (9) trouver la résolvante des noyaux suivants :

81. $K(x, t) = x + t + 1$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

82. $K(x, t) = 1 + 3xt$; $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

83. $K(x, t) = 4xt - x^2$; $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

84. $K(x, t) = e^{x-t}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

85. $K(x, t) = \sin(x + t)$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

86. $K(x, t) = x - \operatorname{sh} t$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

A l'aide de la résolvante résoudre les équations intégrales suivantes :

87. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\, \varphi(t)\, dt = 1$.

88. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{1} (2x - t)\, \varphi(t)\, dt = \frac{x}{6}$.

89. $\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t\, \varphi(t)\, dt = \cos 2x$.

90. $\varphi(x) + \int_0^{1} e^{x-t} \varphi(t)\, dt = e^x$.

91. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{1} (4xt - x^2)\, \varphi(t)\, dt = x$.

§ 8. Noyaux itérés. Construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x). \tag{1}$$

A l'instar des équations de Volterra elle se prête à la méthode des approximations successives. A cette fin on pose

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\, \lambda^n, \tag{2}$$

avec $\psi_n(x)$ définis par les formules

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t)\, dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_1(t)\, dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t)\, dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_2(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b K_3(x, t) f(t)\, dt, \text{ et ainsi de suite.}$$

Ici

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_1(z, t)\, dz,$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_2(z, t)\, dz,$$

et en général

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t)\, dz, \tag{3}$$

$n = 2, 3, \ldots$, et $K_1(x, t) \equiv K(x, t)$. Les fonctions $K_n(x, t)$ définies par les formules (3) s'appellent *noyaux itérés*. Elles vérifient la relation

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_m(x, s) K_{n-m}(s, t)\, ds, \tag{4}$$

où m est un entier naturel quelconque inférieur à n.

La résolvante de l'équation intégrale (1) est définie en fonction des noyaux itérés de la façon suivante :

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1}; \tag{5}$$

le second membre est la *série de Neumann du noyau* $K(x, t)$. Cette série converge pour

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \tag{6}$$

avec $B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt}$.

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce (1) s'exprime par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t)\, dt. \tag{7}$$

La borne (6) est essentielle pour la convergence de la série (5). Mais l'équation (1) peut également admettre une solution pour $|\lambda| > \frac{1}{B}$.

Soit, par exemple,

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(t)\, dt = 1. \tag{8}$$

Ici $K(x, t) \equiv 1$ et, par conséquent,

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t)\, dx\, dt = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dt = 1.$$

Dans ce cas, la condition (6) assure la convergence de la série (5) pour $|\lambda| < 1$.

En résolvant (8) comme une équation à noyau dégénéré (voir § 9) nous trouvons $(1 - \lambda) C = 1$, où $C = \int_0^1 \varphi(t)\, dt$. Lorsque $\lambda = 1$, cette équation n'admet pas de solution, ce qui signifie qu'il en est de même pour l'équation intégrale (8) pour cette valeur de λ. Il en découle que dans un cercle de rayon supérieur à 1, les approximations successives pour l'équation (8) ne peuvent pas converger. Pour $|\lambda| > 1$, celle-ci est cependant résoluble. En effet, quand $\lambda \neq 1$, la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda}$ est solution de l'équation donnée, ce qu'on vérifie aisément par substitution immédiate.

Pour certaines équations de Fredholm, la série de Neumann (5) pour la résolvante converge quel que soit λ. Montrons-le.

Soient deux noyaux $K(x, t)$ et $L(x, t)$. Nous dirons qu'ils sont *orthogonaux* si deux conditions suivantes sont remplies :

$$\int_a^b K(x, z) L(z, t)\, dz = 0, \qquad \int_a^b L(x, z) K(z, t)\, dz = 0 \tag{9}$$

pour toute valeur admissible de x et t.

Par exemple, les noyaux $K(x, t) = xt$ et $L(x, t) = x^2 t^2$ sont orthogonaux sur $[-1, 1]$.

En effet,

$$\int_{-1}^{1} (xz)\,(z^2t^2)\,dz = xt^2 \int_{-1}^{1} z^3\,dz = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2z^2)\,(zt)\,dz = x^2t \int_{-1}^{1} z^3\,dz = 0.$$

Il existe des noyaux orthogonaux à eux-mêmes. Pour de tels noyaux $K_2(x, t) \equiv 0$, $K_2(x, t)$ étant le deuxième noyau itéré. Il est évident que les itérés suivants sont alors nuls eux aussi et la résolvante coïncide avec $K(x, t)$.

Exemple. $K(x, t) = \sin(x - 2t)$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. On a

$$\int_0^{2\pi} \sin(x-2z)\sin(z-2t)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(x+2t-3z) - \cos(x-2t-z)]\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\sin(x+2t-3z) + \sin(x-2t-z)\right]\Big|_{z=0}^{z=2\pi} = 0.$$

Dans ce cas, la résolvante relative au noyau est donc égale à celui-ci :

$$R(x, t; \lambda) \equiv \sin(x - 2t),$$

de sorte que la série de Neumann (5) possède un seul terme et converge évidemment pour tout λ.

Les noyaux itérés $K_n(x, t)$ s'expriment directement en fonction d'un noyau $K(x, t)$ donné :

$$K_n(x, t) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, s_1)\,K(s_1, s_2)\,\dots$$

$$\dots K(s_{n-1}, t)\,ds_1\,ds_2\,\dots\,ds_{n-1}. \quad (10)$$

Tous les itérés $K_n(x, t)$ à commencer par $K_2(x, t)$ sont des fonctions continues dans le carré $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ si le noyau initial $K(x, t)$ est une fonction de carré sommable dans ce carré.

Si un noyau $K(x, t)$ donné est symétrique, il en est de même de tous les itérés $K_n(x, t)$ (voir [18]).

Citons quelques exemples de recherche de noyaux itérés.

Exemple 1. Trouver les itérés du noyau $K(x, t) = x - t$ si $a = 0$, $b = 1$.

Solution. Utilisant les formules (3) on obtient de proche en proche

$$K_1(x, t) = x - t,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 (x - s)(s - t)\, ds = \frac{x + t}{2} - xt - \frac{1}{3},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 (x - s)\left(\frac{s + t}{2} - st - \frac{1}{3}\right) ds = -\frac{x - t}{12},$$

$$K_4(x, t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x - s)(s - t)\, ds = -\frac{1}{12} K_2(x, t) =$$

$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{x + t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right),$$

$$K_5(x, t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x - s)\left(\frac{s + t}{2} - st - \frac{1}{3}\right) ds =$$

$$= -\frac{1}{12} K_3(x, t) = \frac{x - t}{12^2},$$

$$K_6(x, t) = \frac{1}{12^2}\int_0^1 (x - s)(s - t)\, ds = \frac{K_2(x, t)}{12^2} = \frac{1}{12^2}\left(\frac{x + t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right).$$

Il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme :

1) pour $n = 2k - 1$:

$$K_{2k-1}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x - t);$$

2) pour $n = 2k$:

$$K_{2k}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x + t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right),$$

où $k = 1, 2, 3, \ldots$

Exemple 2. Trouver les noyaux itérés $K_1(x, t)$ et $K_2(x, t)$ si $K(x, t) = e^{\min(x, t)}$, $a = 0$, $b = 1$.

Solution. Par définition on a

$$\min(x, t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t & \text{si} \quad t \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

le noyau donné peut donc s'écrire

$$K(x, t) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ e^t & \text{si} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Ce noyau est symétrique (on le vérifie aisément), i.e.

$$K(x, t) = K(t, x).$$

On a $K_1(x, t) = K(x, t)$. Cherchons le deuxième itéré:

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_1(s, t)\, ds = \int_0^1 K(x, s) K(s, t)\, ds.$$

Ici

$$K(x, s) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \\ e^s & \text{si} \quad s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$K(s, t) = \begin{cases} e^s & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \\ e^t & \text{si} \quad t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Vu la symétrie du noyau $K(x, t)$, il suffit d'obtenir $K_2(x, t)$ pour $x > t$.

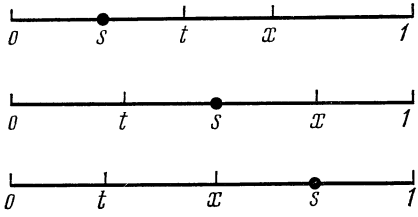

Fig. 2

Nous avons (fig. 2)

$$K_2(x, t) = \int_0^t K(x, s) K(s, t)\, ds + \int_t^x K(x, s) K(s, t)\, ds + \int_x^1 K(x, s) K(s, t)\, ds.$$

Dans l'intervalle $(0, t)$: $s < t < x$, donc

$$\int_0^t K(x, s) K(s, t)\, ds = \int_0^t e^s e^s\, ds = \int_0^t e^{2s}\, ds = \frac{e^{2t} - 1}{2}.$$

Dans l'intervalle (t, x) : $t < s < x$, donc

$$\int_t^x K(x, s) K(s, t)\, ds = \int_t^x e^s e^t\, ds = e^{x+t} - e^{2t}.$$

Dans l'intervalle $(x, 1)$: $s > x > t$, donc

$$\int_x^1 K(x, s) K(s, t)\, ds = \int_x^1 e^x e^t\, ds = (1-x)\, e^{x+t}.$$

Additionnons les intégrales obtenues, il vient

$$K_2(x, t) = (2-x)\, e^{x+t} - \frac{1+e^{2t}}{2} \qquad (x > t).$$

Nous trouverons l'expression de $K_2(x, t)$ pour $x < t$ en permutant les arguments x et t dans l'expression de $K_2(x, t)$ pour $x > t$:

$$K_2(x, t) = (2-t)\, e^{x+t} - \frac{1+e^{2x}}{2} \qquad (x < t).$$

Ainsi, le deuxième noyau itéré est de la forme

$$K_2(x, t) = \begin{cases} (2-t)\, e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2x}}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (2-x)\, e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2t}}{2} & \text{si} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

REMARQUE. Si le noyau $K(x, t)$ défini dans le carré $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ par des expressions analytiques différentes n'est pas

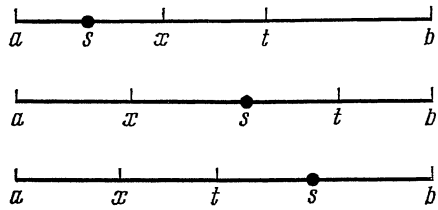

Fig. 3

symétrique, il convient d'examiner séparément le cas $x < t$. Nous avons (fig. 3)

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, s) K(s, t)\, ds = \int_a^x + \int_x^t + \int_t^b.$$

Exemple 3. Trouver les itérés $K_1(x, t)$ et $K_2(x, t)$ si $a = 0$, $b = 1$ et

$$K(x, t) = \begin{cases} x+t & \text{si} \quad 0 \leqslant x < t, \\ x-t & \text{si} \quad t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Solution. On a $K_1(x, t) = K(x, t)$,

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s)\, K(s, t)\, ds,$$

où

$$K(x, s) = \begin{cases} x+s, & 0 \leqslant x < s, \\ x-s, & s < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad K(s, t) = \begin{cases} s+t, & 0 \leqslant s < t, \\ s-t, & t < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Puisque le noyau $K(x, t)$ n'est pas symétrique, la recherche de $K_2(x, t)$ exige qu'on examine séparément les cas 1) $x < t$ et 2) $x > t$.

1) Soit $x < t$. Alors (fig. 3)

$$K_2(x, t) = I_1 + I_2 + I_3,$$

où

$$I_1 = \int_0^x (x-s)(s+t)\, ds = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 t}{2},$$

$$I_2 = \int_x^t (x+s)(s+t)\, ds = \frac{5t^3}{6} - \frac{5x^3}{6} + \frac{3}{2} xt^2 - \frac{3}{2} x^2 t,$$

$$I_3 = \int_t^1 (x+s)(s-t)\, ds = \frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2} - xt + \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}.$$

En additionnant ces intégrales nous obtenons

$$K_2(x, t) = t^3 - \frac{2}{3} x^3 - x^2 t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3} \qquad (x < t).$$

2) Soit $x > t$. Alors (fig. 2)

$$K_2(x, t) = I_1 + I_2 + I_3,$$

où

$$I_1 = \int_0^t (x-s)(s+t)\, ds = \frac{3}{2} xt^2 - \frac{5t^3}{6},$$

$$I_2 = \int_t^x (x-s)(s-t)\, ds = \frac{x^3}{6} - \frac{t^3}{6} - \frac{x^2 t}{2} + \frac{xt^2}{2},$$

$$I_3 = \int_x^1 (x+s)(s-t)\, ds = -\frac{5}{6} x^3 + \frac{3}{2} x^2 t + \frac{x-t}{2} - xt + \frac{1}{3}.$$

Additionnons ces intégrales, il vient

$$K_2(x, t) = -\frac{2}{3} x^3 - t^3 + x^2 t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3} \qquad (x > t).$$

Le deuxième noyau itéré est donc de la forme

$$K_2(x, t) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + t^3 - x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & 0 \leqslant x < t, \\ -\frac{2}{3}x^3 - t^3 + x^2t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

On obtient d'une façon analogue les autres itérés $K_n(x, t)$ $(n = 3, 4, \ldots)$.

Trouver pour a et b donnés les itérés des noyaux ci-dessous:

92. $K(x, t) = x - t$; $a = -1$, $b = 1$.

93. $K(x, t) = \sin(x - t)$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$ $(n = 2, 3)$.

94. $K(x, t) = (x - t)^2$; $a = -1$, $b = 1$ $(n = 2, 3)$.

95. $K(x, t) = x + \sin t$; $a = -\pi$, $b = \pi$.

96. $K(x, t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$.

97. $K(x, t) = e^x \cos t$; $a = 0$, $b = \pi$.

Dans deux exercices qui suivent on demande de trouver $K_2(x, t)$:

98. $K(x, t) = e^{|x-t|}$; $a = 0$, $b = 1$.

99. $K(x, t) = e^{|x|+t}$; $a = -1$, $b = 1$.

Illustrons sur un exemple la construction de la résolvante d'une équation intégrale à l'aide des noyaux itérés.

Considérons l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)\, dt = f(x). \tag{11}$$

Ici $K(x, t) = xt$, $a = 0$, $b = 1$. Cherchons les itérés successifs:

$$K_1(x, t) = xt,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 (xz)(zt)\, dz = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x, t) = \frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)\, dz = \frac{xt}{3^2},$$

. . . . . .

$$K_n(x, t) = \frac{xt}{3^{n-1}}.$$

Selon la formule (5),

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t)\,\lambda^{n-1} = xt \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda},$$

où $|\lambda| < 3$.

En vertu de la formule (7) la solution de l'équation intégrale (11) s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} f(t)\,dt.$$

En particulier, pour $f(x) = x$,

$$\varphi(x) = \frac{3x}{3-\lambda},$$

avec $\lambda \neq 3$.

Construire la résolvante des noyaux suivants :

100. $K(x, t) = e^{x+t}$; $a = 0$, $b = 1$.

101. $K(x, t) = \sin x \cos t$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

102. $K(x, t) = xe^t$; $a = -1$, $b = 1$.

103. $K(x, t) = (1 + x)(1 - t)$; $a = -1$, $b = 0$.

104. $K(x, t) = x^2t^2$; $a = -1$, $b = 1$.

105. $K(x, t) = xt$; $a = -1$, $b = 1$.

Si $M(x, t)$ et $N(x, t)$ sont deux noyaux orthogonaux, la résolvante $R(x, t; \lambda)$ relative au noyau $K(x, t) = M + N$ est égale à la somme des résolvantes $R_1(x, t; \lambda)$ et $R_2(x, t; \lambda)$ relatives respectivement à M et à N.

Exemple 4. Trouver la résolvante du noyau

$$K(x, t) = xt + x^2t^2; \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Solution. Nous avons démontré (page 45) que les noyaux $M(x, t) = xt$ et $N(x, t) = x^2t^2$ sont orthogonaux sur $[-1, 1]$. Aussi la résolvante de $K(x, t)$ est-elle égale à la somme des résolvantes de $M(x, t)$ et $N(x, t)$. En utilisant les résultats des Exercices 104 et 105 nous trouvons

$$R_K(x, t; \lambda) = R_M(x, t; \lambda) + R_N(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda} + \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda},$$

où $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

Trouver les résolvantes pour les noyaux suivants:

106. $K(x, t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$; $a = 0$, $b = 2\pi$.

107. $K(x, t) = 1 + (2x - 1)(2t - 1)$; $a = 0$, $b = 1$.

La propriété indiquée s'étend à un nombre fini quelconque de noyaux.

Si les noyaux $M^{(1)}(x, t)$, $M^{(2)}(x, t)$, . . ., $M^{(n)}(x, t)$ sont deux à deux orthogonaux, la résolvante relative à leur somme

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(x, t)$$

est égale à la somme des résolvantes relatives à chacun des termes.

Appelons n-ième *trace* du noyau $K(x, t)$ la quantité

$$A_n = \int_a^b K_n(x, t)\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

où $K_n(x, t)$ est le n-ième itéré de $K(x, t)$.

Le déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ vérifie alors la formule suivante:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1}. \tag{13}$$

Le rayon de convergence de la série entière (13) est égal au plus petit module des nombres caractéristiques.

108. Montrer que pour l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x),$$

le déterminant de Fredholm $D(\lambda) = e^{-A_1\lambda}$ et, par conséquent, la résolvante de cette équation est une fonction analytique entière de λ.

109. Soit $R(x, t; \lambda)$ la résolvante d'un noyau $K(x, t)$.

Montrer que la résolvante de l'équation

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b R(x, t; \lambda)\, \varphi(t)\, dt = f(x)$$

est $R(x, t; \lambda + \mu)$.

110. Soit

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt = B^2,$$

$$\int_a^b \int_a^b K_n^2(x, t)\, dx\, dt = B_n^2,$$

où $K_n(x, t)$ est le n-ième itéré du noyau $K(x, t)$. Démontrer que si $B_2 = B^2$, alors, quel que soit n, on a $B_n = B^n$.

§ 9. Equations intégrales à noyau dégénéré

Le noyau $K(x, t)$ d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est dit *dégénéré* s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions de x seul par des fonctions de t seul, i.e. il est de la forme

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t)\,; \tag{1}$$

les fonctions $a_k(x)$ et $b_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leqslant x,\ t \leqslant b$ et linéairement indépendantes. L'équation intégrale à noyau dégénéré (1)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t) \right] \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{2}$$

se résout comme suit.

Récrivons (2):

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t)\, \varphi(t)\, dt \tag{3}$$

et introduisons les notations

$$\int_a^b b_k(t)\, \varphi(t)\, dt = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

L'égalité (3) devient alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x), \tag{5}$$

avec C_k des constantes inconnues (puisque la fonction $\varphi(x)$ est inconnue).

Ainsi, la résolution d'une équation intégrale à noyau dégénéré se ramène à la recherche des constantes C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Après avoir porté (5) dans l'équation intégrale (2) et effectué des calculs simples nous obtenons

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0.$$

Les fonctions $a_m(x)$ ($m = 1, 2, \ldots, n$) étant linéairement indépendantes, il en résulte que

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt = 0$$

ou

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\, dt = \int_a^b b_m(t)\, f(t)\, dt \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Afin d'alléger l'écriture, introduisons les notations

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\, dt, \qquad f_m = \int_a^b b_m(t)\, f(t)\, dt.$$

Nous obtenons

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{km} C_k = f_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

ou, sous forme développée,

$$\left.\begin{aligned} &(1 - \lambda a_{11})\, C_1 - \lambda a_{12} C_2 - \ldots - \lambda a_{1n} C_n = f_1, \\ &-\lambda a_{21} C_1 + (1 - \lambda a_{22})\, C_2 - \ldots - \lambda a_{2n} C_n = f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-\lambda a_{n1} C_1 - \lambda a_{n2} C_2 - \ldots + (1 - \lambda a_{nn})\, C_n = f_n. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Pour trouver les C_k, nous avons donc un système de n équations linéaires à n inconnues, dont le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$, le système (6) admet une solution unique $C_1, C_2, \ldots, C_n$ obtenue moyennant les formules de Cramer

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \ldots & -\lambda a_{1k-1} f_1 - \lambda a_{1k+1} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{2k-1} f_2 - \lambda a_{2k+1} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{n1} & \ldots & -\lambda a_{nk-1} f_n - \lambda a_{nk+1} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8)$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$.

L'équation intégrale (2) a pour solution une fonction $\varphi(x)$ définie par l'égalité

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x),$$

avec les coefficients C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ donnés par les formules (8).

REMARQUE. On obtient le système (6) ou bien en multipliant successivement les deux membres de (5) par $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$, puis en intégrant de a à b, ou bien en portant dans (4) l'expression (5) de $\varphi(x)$ où l'on fait $x = t$.

Exemple. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t)\, \varphi(t)\, dt = x. \quad (9)$$

Solution. Mettons cette équation sous la forme

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t\, dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t)\, dt + \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt + x$$

et introduisons les notations

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t\, dt\,; \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t)\, dt\,; \quad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt, \quad (10)$$

où C_1, C_2, C_3 sont les constantes inconnues. L'équation (9) a alors la forme

$$\varphi(x) = C_1 \lambda x + C_2 \lambda \sin x + C_3 \lambda \cos x + x. \quad (11)$$

Portons (11) dans les égalités (10), il vient

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t) \cos t \, dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t)\, t^2 \, dt,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t) \sin t \, dt$$

ou

$$C_1 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt\right) - C_2\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t \, dt - C_3\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt,$$

$$-C_1\lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \, dt + C_2 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t \, dt\right) -$$

$$- C_3\lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \, dt,$$

$$-C_1\lambda \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt - C_2\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt +$$

$$+ C_3 \left(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t \, dt\right) = \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt.$$

En calculant les intégrales, nous obtenons le système d'équations algébriques en C_1, C_2, C_3:

$$\left.\begin{aligned} C_1 - \lambda\pi C_3 &= 0, \\ C_2 + 4\lambda\pi C_3 &= 0, \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 &= 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Le déterminant du système est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

Le système (12) admet solution unique

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \qquad C_2 = -\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}, \qquad C_3 = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

En portant dans (11) les valeurs obtenues de C_1, C_2, C_3 nous aboutissons à la solution de l'équation intégrale donnée :

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x.$$

Résoudre les équations intégrales suivantes à noyau dégénéré :

111. $\varphi(x) - 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, \varphi(t)\, dt = 2x - \pi.$

112. $\varphi(x) - \int_{-1}^{1} e^{\arcsin x}\, \varphi(t)\, dt = \operatorname{tg} x.$

113. $\varphi(x) - \lambda\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} t\, \varphi(t)\, dt = \operatorname{cotg} x.$

114. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \cos(q \ln t)\, \varphi(t)\, dt = 1.$

115. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \arccos t\, \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

116. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^p \varphi(t)\, dt = 1 \quad (p > -1).$

117. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (x \ln t - t \ln x)\, \varphi(t)\, dt = \frac{6}{5}(1 - 4x).$

118. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi/2} \sin x \cos t\, \varphi(t)\, dt = \sin x.$

119. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} |\pi - t| \sin x\, \varphi(t)\, dt = x.$

120. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} \sin(x - t)\, \varphi(t)\, dt = \cos x.$

121. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \cos t - \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cos 3t) \times$

$$\times \varphi(t)\, dt = \cos x.$$

122. $\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[x - \frac{1}{2}(3t^2 - 1) + \frac{1}{2} t (3x^2 - 1) \right] \varphi(t)\, dt = 1.$

§ 10. Nombres caractéristiques et fonctions propres

L'équation intégrale homogène de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \qquad (1)$$

admet toujours la solution évidente $\varphi(x) \equiv 0$ appelée *solution nulle* (*triviale*).

Un nombre λ tel que cette équation admette des solutions non nulles $\varphi(x) \not\equiv 0$ s'appelle *nombre* (ou valeur) *caractéristique* *) de (1) ou du noyau $K(x, t)$, et chaque solution non nulle de l'équation (1) est une *fonction propre* correspondant au nombre caractéristique λ.

La valeur $\lambda = 0$ n'est pas nombre caractéristique puisque pour $\lambda = 0$ (1) entraîne $\varphi(x) \equiv 0$.

Exemple. Vitesse critique d'un arbre.

Il est connu que dès qu'un arbre en rotation atteint une vitesse dite critique, il commence à osciller autour de son axe longitudinal.

On utilise pour définir la vitesse critique des arbres le résultat suivant de la théorie des poutres élastiques: pour toute poutre élastique aux extrémités soumises à des conditions quelconques, il existe une fonction d'influence $G(x, \xi)$ qui décrit sa flèche en $M(x)$ dans une direction donnée, par exemple suivant l'axe Oy (fig. 4), produite par la charge unité appliquée en $N(\xi)$ et agissant dans la même direction.

Conformément au principe de réciprocité de Betti-Maxwell, la fonction d'influence $G(x, \xi)$ est symétrique, i.e.

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Soit $p(x)$ la répartition continue de la charge sur toute la longueur de la poutre. La charge entre x et $x + dx$ est alors $p(x)\, dx$. Selon le principe de superposition de la théorie de l'élasticité l'écart

---

*) Certains auteurs utilisent le terme «valeur propre». Quant à nous, nous appellerons *valeur propre* la quantité $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, où λ est un nombre caractéristique.

de l'axe de la poutre par rapport à la position d'équilibre s'exprime par l'égalité

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Pour arbre de densité linéique $\mu(x)$ en rotation autour de l'axe Ox à une vitesse angulaire ω, la répartition de la charge est

$$p(x) = \omega^2 \mu(x)\, y(x),$$

où $y(x)$ est l'écart du centre de gravité de la section de coordonnée x.

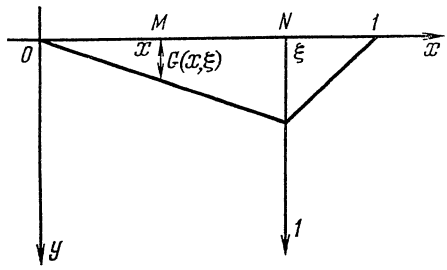

Fig. 4

Portons l'expression de $p(x)$ dans l'équation obtenue, il vient

$$y(x) = \omega^2 \int_0^1 G(x, \xi)\, \mu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

ou, en notant $\omega^2 = \lambda$,

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi)\, \mu(\xi)\, y(\xi)\, d\xi \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Le calcul de la vitesse critique d'un arbre en rotation se ramène donc à celui des λ pour lesquels la dernière équation admet une solution non nulle.

Si le noyau $K(x, t)$ est continu dans le carré $\Omega\ \{a \leqslant x, t \leqslant b\}$ ou s'il est de carré sommable dans Ω, a et b étant finis, il correspond à chaque nombre caractéristique λ un nombre fini de fonctions propres linéairement indépendantes ; le nombre de ces fonctions s'appelle *multiplicité* du nombre caractéristique. Des nombres caractéristiques distincts peuvent être de multiplicité différente.

Dans le cas de l'équation à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t) \right] \varphi(t)\, dt = 0, \qquad (2)$$

les nombres caractéristiques sont racines de l'équation algébrique

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

de degré $p \leqslant n$. $\Delta(\lambda)$ est le déterminant du système linéaire homogène

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda a_{11})\,C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1n}C_n &= 0, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1-\lambda a_{22})\,C_2 - \dots - \lambda a_{2n}C_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \dots + (1-\lambda a_{nn})\,C_n &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

où les quantités a_{mk} et C_m ($k, m = 1, 2, \dots, n$) ont le même sens qu'au paragraphe précédent.

Si l'équation (3) possède p racines ($1 \leqslant p \leqslant n$), l'équation intégrale (2) a p nombres caractéristiques ; à chaque nombre caractéristique λ_m ($m = 1, 2, \dots, p$) correspond une solution non triviale

$$\begin{aligned} &C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_n^{(1)} \to \lambda_1, \\ &C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots, C_n^{(2)} \to \lambda_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &C_1^{(p)}, C_2^{(p)}, \dots, C_n^{(p)} \to \lambda_p \end{aligned}$$

du système (4). Les solutions non nulles de (2) associées à ces solutions (i. e. les fonctions propres) sont de la forme

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(1)} a_k(x), \qquad \varphi_2(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(2)}\, a_k(x), \dots, \varphi_p(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(p)} a_k(x).$$

Une équation intégrale à noyau dégénéré possède au plus n nombres caractéristiques et fonctions propres correspondantes.

Dans le cas d'un noyau quelconque (non dégénéré), les nombres caractéristiques sont zéros du déterminant de Fredholm $D(\lambda)$, i.e. des pôles de la résolvante $R(x, t; \lambda)$. Il en découle en particulier que l'équation intégrale de Volterra $\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$, avec $K(x, t) \in L_2(\Omega_0)$, est sans nombres caractéristiques (pour elle $D(\lambda) = e^{-A_1\lambda}$; voir Exercice 108).

REMARQUE. Les fonctions propres sont définies à un facteur constant près, c'est-à-dire si $\varphi(x)$ est une fonction propre associée

à un nombre caractéristique λ, alors $C\varphi(x)$, où C est une constante arbitraire, l'est également.

Exemple 1. Trouver les nombres caractéristiques et les fonctions propres de l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t)\, \varphi(t)\, dt = 0.$$

Solution. On a

$$\varphi(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos 2t\, dt + \lambda \cos 3x \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos^3 t\, dt.$$

Introduisons les notations

$$C_1 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos 2t\, dt, \qquad C_2 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos^3 t\, dt; \tag{5}$$

nous avons alors

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \cos^2 x + C_2 \lambda \cos 3x. \tag{6}$$

Portons (6) dans (5), nous obtenons un système linéaire d'équations homogènes :

$$\left.\begin{aligned} C_1 \left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t\, dt\right) - C_2 \lambda \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t\, dt = 0, \\ - C_1 \lambda \int_0^{\pi} \cos^5 t\, dt + C_2 \left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos 3t\, dt\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Puisque

$$\int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t\, dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t\, dt = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos^5 t\, dt = 0, \qquad \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos 3t\, dt = \frac{\pi}{8},$$

le système (7) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda\pi}{4}\right) C_1 = 0, \\ \left(1 - \frac{\lambda\pi}{8}\right) C_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

L'équation permettant de trouver les nombres caractéristiques est

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Les nombres caractéristiques sont $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$.

Lorsque $\lambda = \frac{4}{\pi}$, le système (8) se met sous la forme suivante:

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

d'où $C_2 = 0$, C_1 étant arbitraire. La fonction propre correspondante est $\varphi_1(x) = C_1 \lambda \cos^2 x$ ou, en posant $C_1\lambda = 1$, $\varphi_1(x) = \cos^2 x$.

Lorsque $\lambda = \frac{8}{\pi}$, le système s'écrit

$$\begin{cases} (-1) \cdot C_1 = 0, \\ 0 \cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

d'où $C_1 = 0$, C_2 est arbitraire, et la fonction propre associée est $\varphi_2(x) = C_2 \lambda \cos 3x$ ou, en posant $C_2\lambda = 1$, $\varphi_2(x) = \cos 3x$.

Ainsi, les nombres caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{8}{\pi},$$

et les fonctions propres associées

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \quad \varphi_2(x) = \cos 3x.$$

Une équation intégrale homogène de Fredholm peut en général être sans nombres caractéristiques et fonctions propres ou sans nombres caractéristiques réels et fonctions propres.

Exemple 2. L'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (3x-2)\, t\varphi(t)\, dt = 0$$

ne possède pas de nombres caractéristiques et de fonctions propres. En effet,

$$\varphi(x) = \lambda (3x-2) \int_0^1 t\varphi(t)\, dt.$$

Posons

$$C = \int_0^1 t\varphi(t)\,dt, \tag{9}$$

il vient

$$\varphi(x) = C\lambda(3x - 2). \tag{10}$$

Portons (10) dans (9); nous obtenons

$$\left[1 - \lambda \int_0^1 (3t^2 - 2t)\,dt\right] \cdot C = 0. \tag{11}$$

Puisque $\int_0^1 (3t^2 - 2t)\,dt = 0$, l'équation (11) donne $C = 0$, et donc $\varphi(x) \equiv 0$.

Ainsi, l'équation homogène donnée possède pour n'importe quel λ seulement la solution nulle $\varphi(x) \equiv 0$ et elle n'a donc pas de nombres caractéristiques ni de fonctions propres.

Exemple 3. L'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (\sqrt{x}\,t - \sqrt{t}\,x)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

n'a pas de nombres caractéristiques réels et de fonctions propres.

En effet, on a

$$\varphi(x) = C_1\lambda\sqrt{x} - C_2\lambda x, \tag{12}$$

où

$$C_1 = \int_0^1 t\varphi(t)\,dt, \quad C_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\,\varphi(t)\,dt. \tag{13}$$

La substitution de (12) dans (13) donne par des transformations peu compliquées le système d'équations algébriques

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \tfrac{2}{5}\lambda\right) C_1 + \tfrac{\lambda}{3} C_2 = 0, \\ -\tfrac{\lambda}{2} C_1 + \left(1 + \tfrac{2}{5}\lambda\right) C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

dont le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}.$$

Pour λ réels ce déterminant ne s'annule pas, de sorte que (14) donne $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$, donc, pour tous les λ réels, l'équation donnée admet une solution unique, à savoir la solution nulle $\varphi(x) \equiv 0$. Ainsi, elle n'a pas de nombres caractéristiques réels et de fonctions propres.

Trouver les nombres caractéristiques et les fonctions propres pour les équations intégrales homogènes à noyau dégénéré

123. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(t)\, dt = 0.$

124. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t)\, dt = 0.$

125. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin t \varphi(t)\, dt = 0.$

126. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

127. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{1} (45x^2 \ln t - 9t^2 \ln x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

128. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{1} (2xt - 4x^2)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

129. $\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (5xt^3 + 4x^2 t)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

130. $\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (5xt^3 + 4x^2 t + 3xt)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

131. $\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (x \operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

132. $\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (x \operatorname{ch} t - t^2 \operatorname{sh} x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

133. $\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (x \operatorname{ch} t - t \operatorname{ch} x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

Si le n-ième itéré $K_n(x, t)$ du noyau $K(x, t)$ est symétrique, on démontre que $K(x, t)$ possède au moins un nombre caractéristique (réel ou complexe) et que les puissances n-ièmes de tous les nombres caractéristiques sont des nombres réels. En particulier, s'agissant du noyau symétrique gauche $K(x, t) = -K(t, x)$, tous les nombres caractéristiques sont imaginaires purs: $\lambda = \beta i$ avec β réel (voir Exercice 148).

Le noyau $K(x, t)$ d'une équation intégrale est dit *symétrique* si $K(x, t) = K(t, x)$ $(a \leqslant x, t \leqslant b)$.

Pour l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{1}$$

à noyau $K(x, t)$ symétrique on a les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *L'équation* (1) *a au moins un nombre caractéristique réel.*

THÉORÈME 2. *A chaque nombre caractéristique* λ *correspond un nombre fini* q *de fonctions propres linéairement indépendantes de l'équation* (1), *et*

$$q \leqslant \lambda^2 B^2,$$

où

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt.$$

Le nombre q s'appelle *multiplicité* d'un nombre caractéristique.

THÉORÈME 3. *Deux fonctions propres* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *correspondant respectivement à deux nombres caractéristiques distincts* λ_1, λ_2 *sont orthogonales, i.e.*

$$\int_a^b \varphi_1(x)\, \varphi_2(x) dx = 0.$$

THÉORÈME 4. *Chaque intervalle fini de l'axe des* λ *contient un nombre fini de nombres caractéristiques. Le nombre* m *de nombres caractéristiques de l'intervalle* $-l < \lambda < l$ *est défini par l'inégalité*

$$m \leqslant l^2 B^2.$$

Dans le cas où le noyau $K(x, t)$ de l'équation intégrale (1) est la fonction de Green d'un problème homogène de Sturm-Liouville, la recherche des nombres caractéristiques et des fonctions propres se ramène à la résolution de ce problème.

Exemple 4. Trouver les nombres caractéristiques et les fonctions propres de l'équation homogène

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0,$$

où

$$K(x, t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \cos t \sin x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Solution. Mettons l'équation proposée sous la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{x} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt + \lambda \int_x^{\pi} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

ou

$$\varphi(x) = \lambda \sin x \int_0^{x} \varphi(t) \cos t\, dt + \lambda \cos x \int_x^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt. \qquad (15)$$

Dérivons les deux membres de (15), il vient

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int_0^{x} \varphi(t) \cos t\, dt + \lambda \sin x \cos x \varphi(x) -$$

$$- \lambda \sin x \int_x^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt - \lambda \sin x \cos x\, \varphi(x)$$

ou

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int_0^{x} \varphi(t) \cos t\, dt - \lambda \sin x \int_x^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt. \qquad (16)$$

Dérivons une deuxième fois :

$$\varphi''(x) = -\lambda \sin x \int_0^{x} \varphi(t) \cos t\, dt + \lambda \cos^2 x\, \varphi(x) -$$

$$- \lambda \cos x \int_x^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt + \lambda \sin^2 x \varphi(x) =$$

$$= \lambda \varphi(x) - \left[\lambda \sin x \int_0^{x} \varphi(t) \cos t\, dt + \lambda \cos x \int_x^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt \right].$$

L'expression entre crochets vaut $\varphi(x)$, de sorte que

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x) - \varphi(x).$$

Les égalités (15) et (16) permettent de trouver

$$\varphi(\pi) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

L'équation intégrale proposée se ramène donc au problème aux limites

$$\varphi''(x) - (\lambda - 1)\varphi(x) = 0, \tag{17}$$

$$\varphi(\pi) = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \tag{18}$$

Trois cas sont à envisager :

1) $\lambda - 1 = 0$ ou $\lambda = 1$. L'équation (17) s'écrit alors $\varphi''(x) = 0$. Sa solution générale est $\varphi(x) = C_1 x + C_2$. Compte tenu des conditions aux limites (18), nous obtenons le système pour déterminer les inconnues C_1 et C_2

$$\begin{cases} C_1\pi + C_2 = 0, \\ C_1 = 0, \end{cases}$$

qui n'a aucune solution à part $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. L'équation intégrale proposée n'admet donc que la solution triviale

$$\varphi(x) \equiv 0.$$

2) $\lambda - 1 > 0$ ou $\lambda > 1$. La solution générale de (17) a la forme

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda - 1}\, x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda - 1}\, x,$$

d'où

$$\varphi'(x) = \sqrt{\lambda - 1}\,(C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda - 1}\, x + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda - 1}\, x).$$

On détermine les inconnues C_1 et C_2 à l'aide du système

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{ch} \pi\sqrt{\lambda - 1} + C_2 \operatorname{sh} \pi\sqrt{\lambda - 1} = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

donné par les conditions aux limites. Ce système a une solution unique $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. L'équation intégrale a donc la solution triviale $\varphi(x) \equiv 0$. Ainsi, lorsque $\lambda \geqslant 1$, elle n'a pas de nombres caractéristiques et, partant, de fonctions propres.

3) $\lambda - 1 < 0$ ou $\lambda < 1$. La solution générale de (17) est

$$\varphi(x) = C_1 \cos \sqrt{1 - \lambda}\, x + C_2 \sin \sqrt{1 - \lambda}\, x.$$

D'où

$$\varphi'(x) = \sqrt{1 - \lambda}\,(-C_1 \sin \sqrt{1 - \lambda}\, x + C_2 \cos \sqrt{1 - \lambda}\, x).$$

Dans ce cas, les conditions aux limites (18) donnent le système suivant pour déterminer les inconnues C_1 et C_2 :

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cos \pi\sqrt{1 - \lambda} + C_2 \sin \pi\sqrt{1 - \lambda} = 0, \\ \sqrt{1 - \lambda}\, C_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Le déterminant du système est

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \sin\pi\sqrt{1-\lambda}\\ 0 & \sqrt{1-\lambda}\end{vmatrix}.$$

En le posant égal à 0 nous obtenons l'équation pour déterminer les nombres caractéristiques :

$$\begin{vmatrix}\cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \sin\pi\sqrt{1-\lambda}\\ 0 & \sqrt{1-\lambda}\end{vmatrix}=0, \tag{20}$$

ou $\sqrt{1-\lambda}\cos\pi\sqrt{1-\lambda}=0$. Par hypothèse $\sqrt{1-\lambda}\neq 0$, donc $\cos\pi\sqrt{1-\lambda}=0$. D'où $\pi\sqrt{1-\lambda}=\pi/2+\pi n$, avec n un entier arbitraire. Toutes les racines de (20) sont données par la formule

$$\lambda_n=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Lorsque $\lambda=\lambda_n$, le système (19) prend la forme

$$\begin{cases} C_1\cdot 0=0,\\ C_2=0.\end{cases}$$

Il admet une infinité de solutions non nulles

$$\begin{cases} C_1=C,\\ C_2=0,\end{cases}$$

où C est une constante quelconque. Cela signifie que l'équation intégrale initiale admet elle aussi une infinité de solutions de la forme

$$\varphi(x)=C\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

qui sont les fonctions propres de cette équation.

Ainsi, les nombres caractéristiques et les fonctions propres de l'équation intégrale en question s'écrivent

$$\lambda_n=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2,\qquad \varphi_n(x)=\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

où n est un entier quelconque.

Exemple 5. Montrer qu'une équation intégrale à noyau non symétrique

$$K(x,\ t)=\sin\pi x\cos\pi t,\quad 0\leqslant x,\ t\leqslant 1, \tag{21}$$

ne possède pas de valeurs propres.

Solution. Montrons que l'équation

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{22}$$

dont le noyau est donné par la formule (21), n'admet que la solution triviale $\varphi(x) \equiv 0$ $(\lambda \neq 0)$.

En effet, mettons l'équation (22) sous la forme

$$\varphi(x) = \lambda \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t \, \varphi(t) \, dt. \tag{23}$$

Notons

$$C = \int_0^1 \cos \pi t \, \varphi(t) \, dt ;$$

alors

$$\varphi(x) = C\lambda \sin \pi x.$$

Portons cette expression de $\varphi(x)$ dans les deux membres de (23) il vient

$$C\lambda \sin \pi x = C\lambda^2 \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t \, dt.$$

Mais $\int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t \, dt = 0$; c'est pourquoi $C\lambda \sin \pi x \equiv 0$, d'où $C = 0$, donc $\varphi(x) \equiv 0$. C.Q.F.D.

Trouver les nombres caractéristiques et les fonctions propres des équations intégrales homogènes à noyaux symétriques si ces derniers sont de la forme suivante :

134. $K(x, t) = 1 + xt + x^2t^2, \quad -1 \leqslant x, \ t \leqslant 1.$

135. $K(x, t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

136. $K(x, t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ x(t+1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

137. $K(x, t) = \begin{cases} (x+1)(t-2), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)(x-2), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

138. $K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

139. $K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

140. $K(x, t) = \begin{cases} \sin x \sin (t-1), & -\pi \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \sin (x-1), & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

141. $K(x, t) = \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

142. $K(x, t) = e^{-|x-t|}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

143. $K(x, t) = \begin{cases} -e^{-t}\operatorname{sh} x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -e^{-x}\operatorname{sh} t, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

THÉORÈME DE MERCER. *Si le noyau symétrique* $K(x, t) \in L_2$ *est continu et a tous ses nombres caractéristiques positifs (ou au plus un nombre fini de nombres caractéristiques négatifs), la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

converge absolument et uniformément vers $K(x, t)$ *de sorte qu'on a*

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}.$$

Ici $\varphi_n(x)$ *sont les fonctions propres orthonormées du noyau* $K(x, t)$.

Dans le cas général du noyau $K(x, t) \in L_2$ symétrique, la série bilinéaire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

converge en moyenne vers $K(x, t)$.

A partir du développement du noyau $K(x, t)$ suivant les fonctions propres montrer la légitimité des relations suivantes:

144. $\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi t}{n^2} = \begin{cases} x(1-t), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(1-x), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

145. $\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

146. Montrer que si λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sont les nombres caractéristiques du noyau $K(x, t)$, les fonctions propres des équations

$$\varphi(x) - \lambda_1 \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0, \qquad \psi(x) - \lambda_2 \int_a^b K(t, x)\,\psi(t)\,dt = 0$$

sont orthogonales, c'est-à-dire $\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0$.

147. Montrer que si $K(x, t)$ est symétrique, le deuxième itéré $K_2(x, t)$ ne possède que les nombres caractéristiques positifs.

148. Montrer que si le noyau $K(x, t)$ est symétrique gauche, i.e. $K(x, t) = -K(t, x)$, tous ses nombres caractéristiques sont imaginaires purs.

149. Montrer que si le noyau $K(x, t)$ est symétrique, on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m} = A_m \qquad (m = 2, 3, \ldots),$$

où λ_n sont les nombres caractéristiques et A_m les m-ièmes traces du noyau $K(x, t)$.

En utilisant les résultats 135, 138, 142 et 149 trouver les sommes des séries suivantes:

150. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

151. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

152. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\mu_n^2)^2}$, où μ_n sont les racines de l'équation $2 \operatorname{cotg} \mu = \mu - 1/\mu$.

La résolvante d'un noyau symétrique est une fonction méromorphe de λ telle que les nombres caractéristiques de l'équation intégrale soient ses pôles simples. Ses résidus aux pôles λ_i donnent les fonctions propres correspondant à ces λ_i (t étant quelconque).

Trouver les fonctions propres des équations intégrales dont les résolvantes sont définies par les formules suivantes:

153. $R(x, t; \lambda) = \frac{3 - \lambda + 3(1-\lambda)(2x-1)(2t-1)}{\lambda^2 - 4\lambda + 3}$.

154. $R(x, t; \lambda) = \frac{(15-6\lambda)xt + (15-10\lambda)x^2t^2}{4\lambda^2 - 16\lambda + 15}$.

155. $R(x, t; \lambda) =$

$$= \frac{4(5-2\lambda)[3-2\lambda+(3-6\lambda)xt] + 5(4\lambda^2-8\lambda+3)(3x^2-1)(3t^2-1)}{4(1-2\lambda)(3-2\lambda)(5-2\lambda)}.$$

Equations intégrales de Fredholm à noyau dépendant de la différence des arguments

Considérons l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{24}$$

où le noyau $K(x, t)$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ est une fonction paire prolongée par périodicité sur tout l'axe OX, i.e.

$$K(x-t) = K(t-x).$$

On montre que les fonctions propres de l'équation (24) sont

$$\begin{cases} \varphi_n^{(1)}(x) = \cos nx & (n = 1, 2, \ldots), \\ \varphi_n^{(2)}(x) = \sin nx & (n = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

et les nombres caractéristiques associés

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où a_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $K(x)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

A toute valeur λ_n correspondent donc deux fonctions propres linéairement indépendantes $\cos nx$, $\sin nx$ si bien que chaque λ_n est un nombre caractéristique double. La fonction $\varphi_0(x) \equiv 1$ est également fonction propre de l'équation (24) correspondant au nombre caractéristique

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi a_0}, \qquad \text{où} \qquad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x)\,dx.$$

Montrons par exemple que $\cos nx$ est fonction propre de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{25}$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx\,dx.$$

Par le changement de variable $x - t = z$ nous trouvons

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\cos nt\,dt = -\int_{x+\pi}^{x-\pi} K(z)\cos n(x-z)\,dz =$$

$$= \cos nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z)\cos nz\,dz + \sin nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z)\sin nz\,dz = \pi a_n \cos nx$$

puisque la deuxième intégrale est nulle, $K(x)$ étant pair, et la première est le coefficient de Fourier a_n multiplié par π dans le développement de la fonction paire $K(x)$.

Donc,

$$\cos nx = \frac{1}{\pi a_n}\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\cos nt\,dt,$$

autrement dit, $\cos nx$ est fonction propre de l'équation (25). On établit de même que $\sin nx$ est fonction propre de (25) associée au même nombre caractéristique $\frac{1}{\pi a_n}$.

156. Trouver les fonctions propres et les nombres caractéristiques associés de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

157. Montrer que le noyau symétrique

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1-h^2}{1-2h\cos(x-t)+h^2} \qquad (-\pi \leqslant x,\ t \leqslant \pi)$$

possède pour $|h| < 1$ les fonctions propres 1, $\sin nx$, $\cos nx$ correspondant aux nombres caractéristiques 1, $1/h^n$, $1/h^n$.

158. Trouver les nombres caractéristiques et les fonctions propres de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

où $K(x) = x^2$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ est une fonction périodique de période 2π.

Propriétés extrémales des nombres caractéristiques et des fonctions propres

La valeur absolue de l'intégrale double (intégrale de Hilbert)

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left|\int_a^b \int_a^b K(x, t)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,dx\,dt\right|,$$

où $K(x, t) = K(t, x)$ est le noyau symétrique d'une équation intégrale, atteint sur l'ensemble de fonctions $\varphi(x)$ normées, i.e. telles que

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1,$$

un maximum égal à

$$\max |(K\varphi, \varphi)| = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

avec λ_1 le nombre caractéristique le plus petit en module du noyau $K(x, t)$. Ce maximum est réalisé pour $\varphi(x) = \varphi_1(x)$, fonction propre du noyau associée à λ_1.

Exemple 6. Maximiser

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \int_0^\pi \int_0^\pi K(x, t)\, \varphi(x)\, \varphi(t)\, dx\, dt \right|$$

dans la condition

$$(\varphi, \varphi) = \int_0^\pi \varphi^2(x)\, dx = 1$$

si

$$K(x, t) = \cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1.$$

Solution. Résolvant l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1)\, \varphi(t)\, dt$$

comme une équation à noyau dégénéré, nous trouvons les nombres caractéristiques $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ et $\lambda_{2,3} = \pm \frac{2}{\pi}$ et les fonctions propres correspondantes $\varphi_1(x) = C_1$, $\varphi_2(x) = C_2 (\cos x + \cos 2x)$, $\varphi_3(x) = C_3 (\cos x - \cos 2x)$, où C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires.

Le nombre caractéristique de plus petit module est $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ auquel correspond la fonction propre $\varphi_1(x) = C_1$. A partir de la condition de normalisation $(\varphi, \varphi) = 1$, on obtient $C_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Par conséquent,

$$\max \left| \int_0^\pi \int_0^\pi (\cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1)\, \varphi(x)\, \varphi(t)\, dx\, dt \right| = 2\pi,$$

et ce maximum est atteint pour les fonctions $\varphi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

159. Trouver le maximum de

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, \varphi(x)\, \varphi(t)\, dx\, dt \right|$$

dans la condition que $\int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1$ si

a) $K(x, t) = xt, \quad 0 \leqslant x, t \leqslant 1;$

b) $K(x, t) = xt + x^2t^2, \quad -1 \leqslant x, t \leqslant 1;$

c) $K(x, t) = \begin{cases} (x+1)\,t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\,x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

§ 11. Résolution des équations intégrales homogènes à noyau dégénéré

L'équation intégrale homogène à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t) \right] \varphi(t)\, dt = 0 \qquad (1)$$

n'admet, lorsque le paramètre λ n'en est pas nombre caractéristique (i.e. $\Delta(\lambda) \neq 0$), que la solution nulle $\varphi(x) \equiv 0$. Si λ est nombre caractéristique (i.e. $\Delta(\lambda) = 0$), l'équation (1) a, en plus de la solution nulle, des solutions non nulles, fonctions propres relatives à ce nombre caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (1) s'obtient comme combinaison linéaire de ces fonctions propres.

Exemple. Résoudre l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos^2 x \cos 2t + \cos^3 t \cos 3x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$$

Solution. Les nombres caractéristiques de l'équation proposée sont $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$ et les fonctions propres correspondantes ont la forme

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \qquad \varphi_2(x) = \cos 3x.$$

La solution générale de l'équation donnée est

$$\varphi(x) = C \cos^2 x \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{4}{\pi};$$

$$\varphi(x) = C \cos 3x \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{8}{\pi};$$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \neq \frac{4}{\pi}, \ \lambda \neq \frac{8}{\pi},$$

où C est une constante quelconque. La solution nulle (la dernière) est obtenue à partir des solutions générales pour $C = 0$.

Résoudre les équations intégrales homogènes suivantes:

160. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

161. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{1} \arccos x\,\varphi(t)\,dt = 0.$

162. $\varphi(x) - 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\varphi(t)}{1+\cos 2t}\,dt = 0.$

163. $\varphi(x) - \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} |x|\,\varphi(t)\,dt = 0.$

164. $\varphi(x) + 6 \int_0^{1} (x^2 - 2xt)\,\varphi(t)\,dt = 0.$

§ 12. Equations symétriques non homogènes

L'équation intégrale non homogène de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1}$$

est dite *symétrique* si son noyau l'est, i.e. si $K(x, t) \equiv K(t, x)$.

Si $f(x)$ est continue et si le paramètre λ ne coïncide pas avec les nombres caractéristiques λ_n ($n = 1, 2, \ldots$) de l'équation intégrale homogène associée

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0, \tag{2}$$

alors l'équation (1) n'admet pas d'autre solution qu'une solution continue donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\,\varphi_n(x), \tag{3}$$

où $\varphi_n(x)$ sont les fonctions propres de (2) et

$$a_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \tag{4}$$

la série au second membre de (3) convergeant absolument et uniformément dans le carré $a \leqslant x,\ t \leqslant b$.

Si le paramètre λ coïncide avec un nombre caractéristique, par exemple $\lambda = \lambda_k$, de multiplicité q, l'équation (1) n'a en général pas de solution. Une solution existe si et seulement si sont vérifiées q conditions

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, q), \tag{5}$$

i.e. la fonction $f(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions propres relatives au nombre caractéristique λ_k. Dans ce cas, l'équation (1) admet une infinité de solutions à q constantes arbitraires données par la formule

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\,\varphi_n(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x), \tag{6}$$

avec $C_1, C_2, \ldots, C_q$ des constantes quelconques.

Si le noyau est dégénéré :

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\,b_k(t),$$

les seconds membres des formules (3) et (6) contiennent des sommes finies au lieu des séries.

Quand le second membre de (1), i.e. la fonction $f(x)$, est orthogonal à toutes les fonctions propres $\varphi_n(x)$ de l'équation (2), l'équation (1) l'admet comme solution $\varphi(x) = f(x)$.

Exemple 1. Résoudre l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = x, \tag{7}$$

où

$$K(x, t) = \begin{cases} x(t-1) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1) & \text{si} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Solution. Les nombres caractéristiques et les fonctions propres associées s'écrivent

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \qquad \varphi_n(x) = \sin \pi n x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Si $\lambda \neq \lambda_n$, l'équation (7) admet pour solution

$$\varphi(x) = x - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} \sin n\pi x. \tag{8}$$

Cherchons les coefficients de Fourier a_n du second membre, ils sont de la forme

$$a_n = \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Portons dans (8), il vient

$$\varphi(x) = x - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda + n^2\pi^2)} \sin n\pi x.$$

Lorsque $\lambda = -n^2\pi^2$, l'équation (7) n'a pas de solution puisque

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \neq 0.$$

Exemple 2. Résoudre l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \cos \pi x,$$

où

$$K(x, t) = \begin{cases} (x+1)\, t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\, x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Solution. Les nombres caractéristiques sont

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = -n^2\pi^2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

et les fonctions propres correspondantes

$$\varphi_0(x) = e^x, \quad \varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -n^2\pi^2$, la solution de l'équation donnée est de la forme

$$\varphi(x) = \cos \pi x - \lambda \left[\frac{a_0 e^x}{\lambda - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x) \right],$$

et vu que

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos \pi x \, dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2},$$

$$a_n = \int_0^1 \cos \pi x \, (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 1, \end{cases}$$

on a

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda + \pi^2)} (\sin \pi x + \pi \cos \pi x) \right]$$

Pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -\pi^2$ $(n = 1)$, il n'y a pas de solution à l'équation proposée parce que son second membre (la fonction $\cos \pi x$) n'est pas orthogonal aux fonctions propres correspondantes

$$\varphi_0(x) = e^x, \quad \varphi_1(x) = \sin \pi x + \pi \cos \pi x.$$

Pour $\lambda = -n^2\pi^2$, avec $n = 2, 3, \ldots$, l'équation donnée admet par contre une infinité de solutions définies par la formule (6):

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda + \pi^2)} (\sin \pi x + \pi \cos \pi x) \right] + \\ + C (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x),$$

où C est une constante quelconque.

On arrive dans certains cas à ramener l'équation intégrale symétrique non homogène à un problème aux limites non homogène. Cela est possible si le noyau $K(x, t)$ de l'équation intégrale est la fonction de Green d'un opérateur différentiel linéaire. Illustrons le procédé sur un exemple.

Exemple 3. Résoudre l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) \varphi(t)\, dt = e^x, \tag{9}$$

où

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Solution. Récrivons l'équation proposée comme suit:

$$\varphi(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t \varphi(t)\, dt + \frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1) \varphi(t)\, dt. \tag{10}$$

On trouve par deux dérivations:

$$\varphi'(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t \varphi(t)\, dt + \lambda \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1) \varphi(t)\, dt,$$

$$\varphi''(x) = e^x + \frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \operatorname{sh} t \varphi(t)\, dt + \frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \operatorname{sh}(t-1) \varphi(t)\, dt + \\ + \frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x \varphi(x) - \frac{\lambda \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh}(x-1) \varphi(x)$$

ou

$$\varphi''(x) = \varphi(x) + \lambda \varphi(x).$$

Posons $x = 0$, puis $x = 1$ dans (10). Nous obtenons $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = e$. La fonction cherchée $\varphi(x)$ est solution du problème aux limites non homogène suivant:

$$\varphi''(x) - (\lambda + 1)\varphi(x) = 0, \tag{11}$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = e. \tag{12}$$

Considérons les cas suivants:

1) $\lambda + 1 = 0$, i.e. $\lambda = -1$. L'équation (11) est de la forme $\varphi''(x) = 0$, et sa solution générale est

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2.$$

Compte tenu des conditions aux limites (12), nous obtenons le système

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 + C_2 = e, \end{cases}$$

dont la résolution nous fournit les valeurs des constantes: $C_1 = e - 1$ et $C_2 = 1$. Par conséquent,

$$\varphi(x) = (e - 1)x + 1.$$

2) $\lambda + 1 > 0$, i.e. $\lambda > -1$ ($\lambda \neq 0$). La solution générale de (11) s'écrit

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda+1}\, x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda+1}\, x.$$

Moyennant les conditions aux limites (12) cherchons le système pour déterminer C_1 et C_2. On a

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda+1} + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda+1} = e, \end{cases}$$

d'où

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{e - \operatorname{ch} \sqrt{\lambda+1}}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda+1}}.$$

La fonction cherchée $\varphi(x)$ se ramène par des transformations simples à la forme

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda+1}\,(1-x) + e \operatorname{sh} \sqrt{\lambda+1}\, x}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda+1}}.$$

3) $\lambda + 1 < 0$, i.e. $\lambda < -1$. Notons $\lambda + 1 = -\mu^2$. L'équation (11) admet pour solution générale

$$\varphi(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x.$$

Les conditions aux limites (12) donnent le système

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 \cos \mu + C_2 \sin \mu = e. \end{cases} \tag{13}$$

Deux cas peuvent se présenter :

a) μ n'est pas racine de l'équation $\sin \mu = 0$. Alors

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = \frac{e - \cos \mu}{\sin \mu},$$

et donc

$$\varphi(x) = \cos \mu x + \frac{e - \cos \mu}{\sin \mu} \sin \mu x,$$

avec $\mu = \sqrt{-\lambda - 1}$.

b) μ est racine de l'équation $\sin \mu = 0$, i.e. $\mu = n\pi$ ($n = 1, 2, \ldots$). Le système (13) étant incompatible, l'équation proposée (9) n'admet pas de solution. Dans ce cas, l'équation intégrale homogène correspondante

$$\varphi(x) + (1 + n^2\pi^2) \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{14}$$

a des solutions non triviales, i.e. $\lambda_n = -(1 + n^2\pi^2)$ sont les nombres caractéristiques et $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$ les fonctions propres de l'équation (14).

Résoudre les équations intégrales symétriques non homogènes suivantes :

165. $\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = \frac{x}{2}$,

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

166. $\varphi(x) + \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = xe^x$,

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

167. $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = x - 1$,

$$K(x, t) = \begin{cases} x - t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t - x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

168. $\varphi(x) - 2\int_0^{\pi/2} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \cos 2x,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

169. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 1,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

170. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{1} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = x,$

$$K(x, t) = \begin{cases} (x+1)(t-3), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)(x-3), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

171. $\varphi(x) - \int_0^{\pi} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

172. $\varphi(x) - \int_0^{1} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x,$

$$K(x, t) = \begin{cases} -e^{-t} \operatorname{sh} x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -e^{-x} \operatorname{sh} t, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

173. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{1} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \operatorname{ch} x,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{ch} t \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

174. $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} |x - t|\,\varphi(t)\,dt = 1.$

§ 13. Alternative de Fredholm

Pour les équations intégrales de Fredholm on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1 (ALTERNATIVE DE FREDHOLM). *Ou bien l'équation linéaire non homogène de seconde espèce*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{1}$$

admet une solution unique quelle que soit $f(x)$ (appartenant à une classe suffisamment vaste), ou bien l'équation homogène correspondante

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{2}$$

a au moins une solution non triviale, i.e. non identiquement nulle.

THÉORÈME 2. *Le premier cas de l'alternative a également lieu pour l'équation adjointe de* (1)

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(t, x)\, \psi(t)\, dt = g(x), \tag{3}$$

et le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation intégrale homogène (2) *et de l'équation adjointe*

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \psi(t)\, dt = 0 \tag{4}$$

est fini et le même pour les deux équations.

REMARQUE. Si les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . ., $\varphi_n(x)$ sont solutions de l'équation homogène (2), il en est également de leur combinaison linéaire

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x),$$

où C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) sont des constantes arbitraires.

THÉORÈME 3. *Dans le second cas de l'alternative, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation non homogène* (1) *admette une solution $\varphi(x)$ est que le second membre de cette équation, i.e. la fonction $f(x)$, soit orthogonal à toute solution $\psi(x)$ de l'équation homo-*

gène (4) *adjointe de* (2) :

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

REMARQUE. Dans la condition (5), l'équation (1) possède une infinité de solutions puisqu'elle vérifie toute fonction de la forme $\varphi(x) + \widetilde{\varphi}(x)$ avec $\varphi(x)$ une solution de (1) et $\varphi(x)$ toute solution de l'équation homogène correspondante (2). De plus, si l'équation (1) est satisfaite par les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, l'équation étant linéaire, la différence $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ est solution de l'équation (2).

Dans la pratique, l'alternative de Fredholm est le plus important de ces théorèmes. Au lieu de démontrer que l'équation intégrale donnée (1) a une solution, on démontre parfois plus facilement que l'équation homogène correspondante (2) ou son adjointe (4) n'ont pas d'autres solutions que les solutions triviales. Il en résulte, en vertu de l'alternative, que l'équation (1) admet bien une solution.

REMARQUES. 1) Si le noyau $K(x, t)$ de l'équation intégrale (1) est symétrique, i.e. $K(x, t) \equiv K(t, x)$, l'équation adjointe (4) coïncide avec l'équation homogène (2) associée à (1).

2) S'agissant de l'équation intégrale non homogène à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t)\right] \varphi(t)\,dt = f(x),$$

la condition (5), condition d'orthogonalité de son second membre, donne n égalités

$$\int_a^b f(t)\,b_k(t)\,dt = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Exemple 1.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)\,t^2 \varphi(t)\,dt = e^x.$$

Solution. On a

$$\varphi(x) = C\lambda\,(5x^2 - 3) + e^x, \tag{6}$$

où

$$C = \int_0^1 t^2 \varphi(t)\,dt. \tag{7}$$

Portons (6) dans (7), il vient

$$C = C\lambda \int_0^1 (5t^4 - 3t^2)\, dt + \int_0^1 t^2 e^t\, dt,$$

d'où

$$C = e - 2.$$

Quels que soient λ, l'équation proposée a la solution

$$\varphi(x) = \lambda (e - 2)(5x^2 - 3) + e^x,$$

et l'équation homogène associée

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)\, t^2 \varphi(t)\, dt = 0$$

la seule solution nulle $\varphi(x) \equiv 0$.

Exemple 2.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \sin \ln x \varphi(t)\, dt = 2x.$$

Solution. On a

$$\varphi(x) = C\lambda \sin \ln x + 2x,$$

où $C = \int_0^1 \varphi(t)\, dt$. Substituons l'expression de $\varphi(t)$ dans cette intégrale ; nous obtenons

$$C = C\lambda \int_0^1 \sin \ln t\, dt + 1,$$

d'où

$$C\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = 1.$$

Si $\lambda \neq -2$, l'équation donnée a la solution $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{2+\lambda} \sin \ln x + 2x$ et l'équation homogène correspondante

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \sin \ln x \varphi(t)\, dt = 0$$

la seule solution $\varphi(x) \equiv 0$.

Dans le cas contraire ($\lambda = -2$), l'équation proposée ne possède pas de solution puisque le second membre $f(x) = 2x$ n'est pas orthogonal à la fonction $\sin \ln x$; l'équation homogène admet une

infinité de solutions vu que l'équation donnant C : $0 \cdot C = 0$, entraîne le caractère arbitraire de C ; toutes ces solutions sont données par la formule

$$\varphi(x) = \widetilde{C} \sin \ln x \qquad (\widetilde{C} = -2C).$$

Exemple 3.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\, \varphi(t)\, dt = \cos 3x.$$

Solution. Récrivons l'équation proposée :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos x \cos t - \sin x \sin t)\, \varphi(t)\, dt = \cos 3x.$$

Il en résulte

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \cos x - C_2 \lambda \sin x + \cos 3x, \tag{8}$$

avec

$$C_1 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos t\, dt, \qquad C_2 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt. \tag{9}$$

Portons (8) dans (9), il vient

$$\begin{cases} C_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} (C_1 \lambda \cos t - C_2 \lambda \sin t + \cos 3t) \cos t\, dt, \\ C_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} (C_1 \lambda \cos t - C_2 \lambda \sin t + \cos 3t) \sin t\, dt, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \lambda \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt\right) + C_2 \lambda \int_0^{\pi} \sin t \cos t\, dt = \int_0^{\pi} \cos 3t \cos t\, dt, \\ -C_1 \lambda \displaystyle\int_0^{\pi} \cos t \sin t\, dt + C_2 \left(1 + \lambda \int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt\right) = \int_0^{\pi} \cos 3t \sin t\, dt, \end{cases}$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} C_1 \left(1 - \lambda \tfrac{\pi}{2}\right) &= 0, \\ C_2 \left(1 + \lambda \tfrac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}=1-\frac{\pi^2}{4}\lambda^2.$$

1) Pour $\lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}$ ($\Delta(\lambda)\neq 0$), le système (10) a une solution unique, soit $C_1=0$, $C_2=0$; par conséquent, l'équation donnée admet la solution $\varphi(x)=\cos 3x$ et l'équation homogène correspondante

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{11}$$

la seule solution nulle : $\varphi(x)\equiv 0$.

2) Si $\lambda=\frac{2}{\pi}$, le système (10) se met sous la forme

$$\begin{cases} C_1\cdot 0=0, \\ C_2\cdot 2=0. \end{cases}$$

Il en découle que $C_2=0$ et $C_1=C$, avec C une constante quelconque. L'équation donnée admet une infinité de solutions définies par la formule

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}C\cdot\cos x+\cos 3x$$

ou

$$\varphi(x)=\widetilde{C}\cdot\cos x+\cos 3x \qquad \left(\widetilde{C}=\frac{2C}{\pi}\right),$$

et l'équation homogène associée (11) en possède également une infinité :

$$\varphi(x)=\widetilde{C}\cdot\cos x.$$

3) Si $\lambda=-\frac{2}{\pi}$, le système (10) prend la forme

$$\begin{cases} 2\cdot C_1=0, \\ 0\cdot C_2=0, \end{cases}$$

d'où $C_1=0$, $C_2=C$, C étant une constante quelconque.

La solution générale de l'équation proposée s'écrit

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}C\cdot\sin x+\cos 3x$$

ou

$$\varphi(x)=\widetilde{C}\cdot\sin x+\cos 3x \qquad \left(\widetilde{C}=\frac{2C}{\pi}\right).$$

Dans cet exemple, le noyau $K(x, t) = \cos(x + t)$ de l'équation donnée est symétrique: $K(x, t) = K(t, x)$; le second membre de l'équation, i.e. la fonction $f(x) = \cos 3x$, est orthogonal aux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sur le segment $[0, \pi]$.

Etablir si les équations intégrales ci-dessous sont résolubles pour diverses valeurs du paramètre λ.

175. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 x \varphi(t)\, dt = 1.$

176. $\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} xe^t \varphi(t)\, dt = x.$

177. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} |x - \pi| \varphi(t)\, dt = x.$

178. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{1} (2xt - 4x^2) \varphi(t)\, dt = 1 - 2x.$

179. $\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - 2xt) \varphi(t)\, dt = x^3 - x.$

180. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} \cos x \cos t + \frac{1}{\pi} \sin 2x \sin 2t\right) \varphi(t)\, dt = \sin x.$

181. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{1} K(x, t) \varphi(t)\, dt = 1$, où

$$K(x, t) = \begin{cases} \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \operatorname{ch} t \operatorname{sh} x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Exemple 4. Pour quelles valeurs des paramètres α et β l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{1} xt^2 \varphi(t)\, dt + \alpha x + \beta \tag{12}$$

admet-elle une solution?

Solution. Si λ n'est pas nombre caractéristique du noyau $K(x, t) = xt^2$, l'équation (12) est résoluble pour n'importe quel second membre, i.e. quels que soient α et β.

Considérons l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 xt^2 \varphi(t)\, dt \tag{13}$$

correspondant à l'équation donnée (12). Résolvant (13) comme une équation à noyau dégénéré, nous établissons que $\lambda = 4$ est nombre caractéristique de ce noyau. La fonction propre correspondant à $\lambda = 4$ est $\varphi(x) = x$ (à un facteur constant près).

Considérons l'équation intégrale homogène adjointe de l'équation (13), à savoir

$$\psi(x) = \mu \int_0^1 tx^2 \psi(t)\, dt. \tag{14}$$

Cette équation possède comme nombre caractéristique la valeur $\mu = 4$. Il correspond à ce nombre caractéristique la fonction propre $\psi(x) = x^2$. Aussi, pour $\lambda = 4$, l'équation non homogène (12) admet-elle une solution si et seulement si

$$\int_0^1 (\alpha x + \beta)\, x^2\, dx = 0 \quad \text{ou} \quad 3\alpha + 4\beta = 0. \tag{15}$$

Soit, par exemple,

$$\varphi(x) = 4 \int_0^1 xt^2 \varphi(t)\, dt + x + 1. \tag{16}$$

Ici $\alpha = 1$, $\beta = 1$ si bien que la condition (15) n'est pas remplie: l'équation (16) est impossible. Soit maintenant l'équation

$$\varphi(x) = 4 \int_0^1 xt^2 \varphi(t)\, dt + x - \frac{3}{4}, \tag{17}$$

où $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{3}{4}$. Pour ces valeurs de α et β, la condition (15) est évidemment satisfaite, donc l'équation (17) admet une solution, qui est de la forme

$$\varphi(x) = 4Cx + x - \frac{3}{4} = C_1 x - \frac{3}{4},$$

avec C_1 une constante quelconque, d'où, conformément à la théorie générale, la non-unicité de cette solution.

Pour quelles valeurs des paramètres existent des solutions des équations intégrales suivantes?

182. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)\,dt + \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$

183. $\varphi(x) = \lambda \int_{0}^{1} (x+t)\,\varphi(t)\,dt + \alpha e^x + \beta x.$

184. $\varphi(x) = \lambda \int_{0}^{\pi/2} xt\varphi(t)\,dt + \alpha x + \beta \sin x.$

Equations intégrales qui ne sont pas de Fredholm

Si dans l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{18}$$

le noyau $K(x, t)$ est tel que

$$\int_{a}^{b}\int_{a}^{b} K^2(x, t)\,dx\,dt < +\infty \tag{19}$$

(a et b pouvant être infinis), l'équation (18) vérifie les théorèmes de Fredholm.

Si la condition (19) n'est pas satisfaite, les nombres caractéristiques de l'équation intégrale (18) peuvent remplir des intervalles entiers ou être de multiplicité infinie. On dit donc souvent de telles équations qu'*elles ne sont pas de Fredholm.*

185. Montrer que l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_{0}^{+\infty} e^{-xt}\varphi(t)\,dt = f(x)$$

n'est pas de Fredholm.

186. Montrer que l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{0}^{\infty} \varphi(t) \sin xt\,dt$$

a les nombres caractéristiques $\lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ de multiplicité infinie et trouver les fonctions propres correspondantes.

187. Montrer que l'équation intégrale à noyau de Hankel

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt$$

(avec $J_\nu(z)$ une fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν) possède les nombres caractéristiques $\lambda = \pm 1$ de multiplicité infinie et trouver les fonctions propres correspondantes.

188. Montrer que pour l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_x^\infty \frac{(t-x)^n}{n!}\,\varphi(t)\,dt$$

tout nombre λ tel que l'une des valeurs $\sqrt[n+1]{\lambda}$ soit à partie réelle positive, est nombre caractéristique.

189. Montrer que l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right)\varphi(t)\,dt$$

possède une infinité de nombres caractéristiques $\lambda = \xi + i\eta$, le point (ξ, η) étant extérieur à la parabole $\xi + \eta^2 = 0$.

§ 14. Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles ordinaires

Soient l'équation différentielle d'ordre n

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \qquad (1)$$

où les fonctions $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ sont continues sur $[a, b]$, $p_0(x) \neq 0$ sur $[a, b]$, et les conditions aux limites

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

les formes linéaires V_1, ..., V_n en $y(a)$, $y'(a)$, ..., $y^{(n-1)}(a)$, $y(b)$, ..., $y^{(n-1)}(b)$ étant linéairement indépendantes.

Supposons que le problème aux limites homogène (1)-(2) admet la seule solution triviale $y(x) \equiv 0$.

DÉFINITION. *On appelle fonction de Green* (ou *fonction d'influence*) *du problème aux limites* (1)-(2) *la fonction* $G(x, \xi)$ *construite pour tout point* ξ, $a < \xi < b$, *et jouissant des* 4 *propriétés suivantes*:

1° $G(x, \xi)$ *est continue et possède des dérivées continues par rapport à* x *jusqu'à l'ordre* $n - 2$ *inclus pour* $a \leqslant x \leqslant b$.

2° *Sa* $(n-1)$*-ième dérivée par rapport à* x *présente au point* $x=\xi$ *une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur* $\frac{1}{p_0(\xi)}$, *i.e.*

$$\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\Big|_{x=\xi+0}-\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\Big|_{x=\xi-0}=\frac{1}{p_0(\xi)}. \tag{3}$$

3° *Dans chacun des intervalles* $[a,\xi)$ *et* $(\xi,b]$, *la fonction* $G(x,\xi)$ *considérée comme une fonction de* x *est solution de l'équation* (1):

$$L[G]=0.$$

4° $G(x,\xi)$ *vérifie les conditions aux limites* (2):

$$V_k(G)=0 \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{4}$$

THÉORÈME 1. *Si le problème aux limites* (1)-(2) *n'a pas de solution autre que la solution triviale* $y(x)\equiv 0$, *l'opérateur* L *a une fonction de Green* $G(x,\xi)$ *et une seule.*

DÉMONSTRATION. Soient $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ les solutions linéairement indépendantes de l'équation $L[y]=0$. Vu la propriété 3°, sur les intervalles $[a,\xi)$ et $(\xi,b]$ la fonction cherchée $G(x,\xi)$ doit être de la forme:

$$G(x,\xi)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+\ldots+a_ny_n(x) \quad \text{pour} \quad a\leqslant x<\xi$$

et

$$G(x,\xi)=b_1y_1(x)+b_2y_2(x)+\ldots+b_ny_n(x) \quad \text{pour} \quad \xi<x\leqslant b.$$

Ici $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des fonctions de ξ. En vertu de la continuité au point $x=\xi$ de la fonction $G(x,\xi)$ et de ses premières $n-2$ dérivées par rapport à x, nous avons

$$[b_1y_1(\xi)+\ldots+b_ny_n(\xi)]-[a_1y_1(\xi)+\ldots+a_ny_n(\xi)]=0,$$

$$[b_1y_1'(\xi)+\ldots+b_ny_n'(\xi)]-[a_1y_1'(\xi)+\ldots+a_ny_n'(\xi)]=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[b_1y_1^{(n-2)}(\xi)+\ldots+b_ny_n^{(n-2)}(\xi)]-[a_1y_1^{(n-2)}(\xi)+\ldots+a_ny_n^{(n-2)}(\xi)]=0,$$

et la condition (3) s'écrit

$$[b_1y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+b_ny_n^{(n-1)}(\xi)]-[a_1y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+a_ny_n^{(n-1)}(\xi)]=$$

$$=\frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Posons $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, il vient le système d'équations linéaires par rapport à $c_k(\xi)$:

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + \ldots + c_n y_n(\xi) &= 0, \\ c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2'(\xi) + \ldots + c_n y_n'(\xi) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) &= 0, \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) &= \frac{1}{p_0(\xi)}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Le déterminant du système (5) est égal à la valeur en $x = \xi$ du wronskien $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, il n'est donc pas nul. Aussi le système (5) détermine-t-il de façon unique les fonctions $c_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Déterminons les fonctions $a_k(\xi)$ et $b_k(\xi)$ moyennant les conditions aux limites (2). Mettons $V_k(y)$ sous la forme

$$V_k(y) = A_k(y) + B_k(y), \quad (6)$$

où

$$A_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a),$$
$$B_k(y) = \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(q) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b)$$

En vertu des conditions (4) nous obtenons alors

$$V_k(G) = a_1 A_k(y_1) + a_2 A_k(y_2) + \ldots + a_n A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + \ldots + b_n B_k(y_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Compte tenu de $a_k = b_k - c_k$, nous avons

$$(b_1 - c_1) A_k(y_1) + (b_2 - c_2) A_k(y_2) + \ldots + (b_n - c_n) A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + \ldots + b_n B_k(y_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

D'où, en vertu de (6),

$$b_1 V_k(y_1) + b_2 V_k(y_2) + \ldots + b_n V_k(y_n) = c_1 A_k(y_1) + c_2 A_k(y_2) + \ldots + c_n A_k(y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (7)$$

Notons que le système (7) est linéaire en $b_1, \ldots, b_n$. Son déterminant

$$\begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \ldots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \ldots & V_2(y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \ldots & V_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

étant donné l'hypothèse de l'indépendance linéaire des formes V_1, $V_2, \ldots, V_n$.

Ainsi, le système d'équations (7) admet une solution unique en $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$, . . ., $b_n(\xi)$, et comme $a_k(\xi) = b_k(\xi) - c_k(\xi)$, les quantités $a_k(\xi)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) sont également définies de façon unique. Nous venons donc de démontrer l'existence et l'unicité de la fonction de Green $G(x, \xi)$ et de fournir un procédé de sa construction.

REMARQUE 1. Si le problème aux limites (1)-(2) est auto-adjoint, la fonction de Green est symétrique, i.e.

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

La réciproque est également vraie.

Pour les conditions sous lesquelles un problème aux limites relatif à des opérateurs différentiels d'ordre 2 et 4 est auto-adjoint, consulter [23].

REMARQUE 2. Si à l'une extrémité de $[a, b]$ le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé s'annule, p. ex. $p_0(a) = 0$, on y assujettit la solution à la condition de borne pour $x = a$ et, à l'autre extrémité, on se donne la condition à limite ordinaire (voir Exemple 2 ci-dessous).

Un cas particulier important

Construisons la fonction de Green pour l'équation différentielle du second ordre de la forme

$$\begin{gathered}(p(x)y')' + q(x)y = 0, \\ p(x) \neq 0 \quad \text{sur} \quad [a, b],\ p(x) \in C^{(1)}[a, b],\end{gathered} \tag{8}$$

avec les conditions aux limites

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{9}$$

Supposons que $y_1(x)$ est une solution de l'équation (8) définie par les conditions initiales

$$y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = \alpha \neq 0.$$

D'une façon générale, cette solution ne vérifie pas nécessairement la seconde condition aux limites, ce qui nous autorise à supposer que $y_1(b) \neq 0$. Les fonctions de la forme $C_1 y_1(x)$ avec C_1 une constante quelconque sont évidemment solutions de (8) et vérifient la condition aux limites

$$y(a) = 0.$$

Trouvons de même une solution non nulle $y_2(x)$ de (8) telle qu'elle satisfasse à la seconde condition aux limites, i.e.

$$y_2(b) = 0.$$

Cette condition est vérifiée par toutes les solutions de la famille $C_2 y_2(x)$, où C_2 est une constante arbitraire.

Cherchons la fonction de Green relative au problème (8)-(9) sous la forme

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1 y_1(x) & \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2 y_2(x) & \text{pour} \quad \xi \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{10}$$

les constantes C_1 et C_2 étant choisies telles qu'on ait les propriétés 1° et 2°, c'est-à-dire la fonction $G(x, \xi)$ est continue en x pour ξ fixe, en particulier elle est continue au point $x = \xi$:

$$C_1 y_1(\xi) = C_2 y_2(\xi),$$

et $G'_x(x, \xi)$ subit en ce point un saut de valeur $\frac{1}{p(\xi)}$:

$$C_2 y'_2(\xi) - C_1 y'_1(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Récrivons les deux dernières égalités:

$$\left.\begin{aligned} -C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) &= 0, \\ -C_1 y'_1(\xi) + C_2 y'_2(\xi) &= \frac{1}{p(\xi)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Le déterminant du système (11) est le wronskien $W[y_1(x), y_2(x)] = W(x)$ calculé en $x = \xi$ pour les solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation (8), donc

$$W(\xi) \neq 0,$$

de sorte que C_1 et C_2 de (11) se définissent de suite:

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi) W(\xi)}, \qquad C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi) W(\xi)}.$$

Portant les expressions de C_1 et C_2 dans (10) nous obtenons finalement

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x) y_2(\xi)}{p(\xi) W(\xi)}, & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi) y_2(x)}{p(\xi) W(\xi)}, & \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{12}$$

REMARQUE 1. Les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de (8) que nous avons choisies, sont linéairement indépendantes en vertu de l'hypothèse $y_1(b) \neq 0$.

En effet, les solutions qui dépendent linéairement de $y_1(x)$ sont toutes de la forme $C_1 y_1(x)$, et, par conséquent, elles ne s'annulent pas pour $C_1 \neq 0$ au point $x = b$ où conformément à notre choix, la solution $y_2(x)$ prend la valeur 0.

REMARQUE 2. Le problème aux limites pour l'équation du second ordre de la forme

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \tag{13}$$

et les conditions aux limites

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \tag{14}$$

se ramène au problème considéré (8)-(9) :

1) L'équation linéaire (13) se ramène à (8) par multiplication par $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$ (on prend comme $q(x)$ le produit $p(x)\,p_2(x)$).

2) Par changement linéaire de fonction cherchée

$$z(x) = y(x) - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A$$

on ramène les conditions aux limites (14) aux conditions nulles (9). Ce faisant, on n'enfreint pas la linéarité de l'équation (13), mais au lieu de (8) on obtient l'équation avec le second membre $L[z] = f(x)$, où

$$f(x) = -\left[A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)\right] q(x) - \frac{B-A}{b-a}\,p(x)\,p_1(x).$$

On construit cependant la fonction de Green relative au problème aux limites homogène $L[z] = 0$, $z(a) = z(b) = 0$, qui coïncide complètement avec le problème (8)-(9).

Exemple 1. Construire la fonction de Green pour le problème aux limites homogène

$$y^{(IV)}(x) = 0, \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) = y'(0) = 0, \\ y(1) = y'(1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Solution. Commençons par montrer que ce problème n'admet que la solution triviale. En effet, le système fondamental de solutions pour l'équation (15) est

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2, \quad y_4(x) = x^3, \tag{17}$$

de sorte que la solution générale de (15) a la forme

$$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

avec A, B, C, D des constantes quelconques. Les conditions aux limites (16) donnent quatre relations permettant de définir ces

constantes :

$$y(0) = A = 0,$$
$$y'(0) = B = 0,$$
$$y(1) = A + B + C + D = 0,$$
$$y'(1) = B + 2C + 3D = 0.$$

D'où $A = B = C = D = 0$.

Ainsi, le problème (15)-(16) a comme l'unique solution $y(x) \equiv 0$, et on peut donc construire pour lui une fonction de Green (et une seule) $G(x, \xi)$.

Construisons cette fonction. Utilisons le système fondamental de solutions (17) et cherchons la fonction de Green sous la forme

$$G(x, \xi) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \tag{18}$$
$$G(x, \xi) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot x^2 + b_4 \cdot x^3 \quad \text{pour} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1, \tag{19}$$

où a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 sont des fonctions de ξ à déterminer. Posons $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ et écrivons le système d'équations linéaires permettant de définir $c_k(\xi)$ (voir système (5)) :

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3 &= 0, \\ c_2 + c_3 \cdot 2\xi + c_4 \cdot 3\xi^2 &= 0, \\ c_3 \cdot 2 + c_4 \cdot 6\xi &= 0, \\ c_4 \cdot 6 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Résolvons-le, il vient

$$\left.\begin{aligned} c_1(\xi) &= -\frac{1}{6}\xi^3, & c_2(\xi) &= \frac{1}{2}\xi^2, \\ c_3(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi, & c_4(\xi) &= \frac{1}{6}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Utilisons ensuite la propriété 4° de la fonction de Green qui dit qu'elle doit satisfaire aux conditions aux limites (2), i.e.

$$G(0, \xi) = 0, \quad G'_x(0, \xi) = 0,$$
$$G(1, \xi) = 0, \quad G'_x(1, \xi) = 0.$$

Ces relations deviennent en l'occurrence

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0, \\ b_2 + 2b_3 + 3b_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Etant donné que $c_k = b_k - a_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, nous trouvons à partir de (20) et (21)

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = 0,\ b_1 = -\frac{1}{6}\xi^3, && a_2 = 0,\ b_2 = \frac{1}{2}\xi^2, \\ &b_3 = \frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2, && b_4 = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3, \\ &a_3 = \frac{1}{2}\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3, && a_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Portant dans (18) et (19) les valeurs (22) des coefficients $a_1, a_2, \ldots, b_4$, nous obtenons la fonction de Green cherchée

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3\right)x^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, \\ \qquad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 x + \left(\frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, \\ \qquad \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

La dernière expression se transformant facilement en

$$G(x, \xi) = \left(\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\xi^3 \quad \text{pour} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1,$$

si bien que $G(x, \xi) = G(\xi, x)$: la fonction de Green est symétrique. Le problème aux limites (15)-(16) étant auto-adjoint, cette symétrie est évidente à priori.

Nous laissons au lecteur le soin de l'établir de son propre chef. Nous recommandons de plus de vérifier que la fonction de Green que nous venons d'obtenir remplit les conditions 1°, 2°, 3°, 4° énoncées lors de sa définition.

Exemple 2. Former la fonction de Green pour l'équation différentielle

$$xy'' + y' = 0 \qquad (23)$$

sous les conditions suivantes :

$$y(x) \text{ est borné pour } x \to 0,$$
$$y(1) = \alpha y'(1),\ \alpha \neq 0. \qquad (24)$$

Solution. Trouvons la solution générale de l'équation (23) et vérifions que les conditions (24) ne sont remplies que lorsque

$$y(x) \equiv 0.$$

En effet, en notant $y'(x) = z(x)$, nous obtenons $xz' + z = 0$, d'où $\ln z = \ln c_1 - \ln x$, $z = \frac{c_1}{x}$, donc

$$y(x) = c_1 \ln x + c_2. \tag{25}$$

Il est clair que $y(x)$ défini par (25) ne vérifie les conditions (24) que pour $c_1 = c_2 = 0$, ce qui signifie la possibilité de construire la fonction de Green pour le problème (23)-(24).

Ecrivons formellement $G(x, \xi)$ comme suit :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 + a_2 \ln x & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant \xi, \\ b_1 + b_2 \ln x & \text{pour} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{26}$$

La continuité de $G(x, \xi)$ pour $x = \xi$ entraîne

$$b_1 + b_2 \ln \xi - a_1 - a_2 \ln \xi = 0,$$

et le saut de $G'_x(x, \xi)$ au point $x = \xi$ vaut $\frac{1}{\xi}$, de sorte que

$$b_2 \cdot \frac{1}{\xi} - a_2 \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}.$$

Posons

$$c_1 = b_1 - a_1, \qquad c_2 = b_2 - a_2, \tag{27}$$

il vient

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \ln \xi = 0, \\ c_2 = 1, \end{cases}$$

d'où

$$c_1 = -\ln \xi, \qquad c_2 = 1. \tag{28}$$

Faisons intervenir les conditions (24). $G(x, \xi)$ étant bornée pour $x \to 0$, on a $a_2 = 0$, et la condition $G(1, \xi) = \alpha G'_x(1, \xi)$ fournit $b_1 = \alpha b_2$. Compte tenu de (27) et (28) nous trouvons tous les coefficients de la formule (26), à savoir :

$$a_1 = \alpha + \ln \xi, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = \alpha, \quad b_2 = 1.$$

Donc

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \alpha + \ln \xi, & 0 < x \leqslant \xi, \\ \alpha + \ln x, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Exemple 3. Trouver la fonction de Green du problème aux limites

$$y''(x) + k^2 y = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0.$$

Solution. On s'assure sans peine que la solution $y_1(x) = \sin kx$ satisfait à la condition aux limites $y_1(0) = 0$ et la solution $y_2(x) = \sin k(x-1)$ à la condition $y_2(1) = 0$, les deux solutions étant linéairement indépendantes. Cherchons la valeur du wronskien pour $\sin kx$ et $\sin k(x-1)$ au point $x = \xi$. Cette valeur est

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \sin k\xi & \sin k(\xi-1) \\ k\cos k\xi & k\cos k(\xi-1) \end{vmatrix} =$$

$$= k[\sin k\xi \cos k(\xi-1) - \sin k(\xi-1)\cos k\xi] = k\sin k.$$

Etant donné que dans notre exemple $p(x) = 1$, nous obtenons en vertu de (12):

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin k(\xi-1)\cdot \sin kx}{k\sin k}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\sin k\xi \cdot \sin k(x-1)}{k\sin k}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Exemple 4. Trouver la fonction d'influence $G(x, y)$ pour une poutre appuyée aux deux extrémités $x = 0$ et $x = 1$. (Ici $G(x, y)$ est le déplacement parallèle à l'axe Oz effectué par la section droite au point $x = y$ sous l'effet de la charge unité concentrée en ce point et agissant parallèlement au même axe.)

Solution. Soient R_0 et R_1 des réactions d'appui dues à la charge unité appliquée au point $x = y$ (fig. 5). Le moment fléchissant M

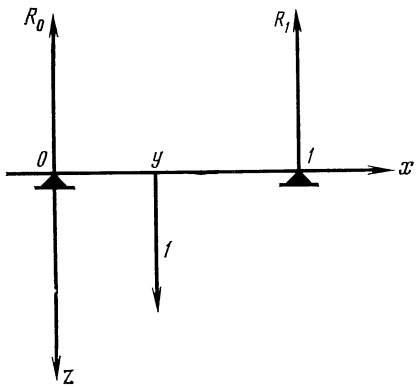

Fig. 5

en x est alors

$$M = \begin{cases} -R_0 x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant y, \\ -R_1(1-x) & \text{si} \quad y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour que le système de trois forces R_0, R_1 et $Q = 1$ soit en équilibre, il faut que

$$1 - R_0 - R_1 = 0, \qquad R_1 \cdot 1 = 1 \cdot y.$$

D'où $R_1 = y$, $R_0 = 1 - y$. Le moment fléchissant s'avère alors

$$M = M(x, y) = \begin{cases} -x(1-y) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant y, \\ -y(1-x) & \text{si} \quad y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

La fonction d'influence $G(x, y)$ doit donc vérifier l'équation différentielle du moment fléchissant

$$E_x I_x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = M \tag{29}$$

et les conditions aux limites

$$G(0, y) \equiv 0, \qquad G(1, y) \equiv 0. \tag{30}$$

Ici E_x est le module de Young et I_x le moment d'inertie de la section droite de la poutre par rapport à l'axe neutre normal au plan xOz au point x.

On résout le problème aux limites (29)-(30) moyennant l'intégrale

$$M^*(x, y) = \int_0^1 M(x, z)\, M(z, y)\, F(z)\, dz,$$

avec

$$F(x) = \frac{1}{E_x I_x}.$$

En effet, $M^*(x, y)$ satisfait aux conditions aux limites (30) puisque

$$M^*(0, y) = M^*(1, y) \equiv 0,$$

et elle vérifie l'équation différentielle (29) en tant qu'une fonction symétrique en x et y qui s'explicite comme suit pour $x \leqslant y$:

$$M^*(x, y) = xy \int_0^1 (1 - z)^2 F(z)\, dz - x \int_0^y (1-y)(y-z) F(z)\, dz -$$

$$- (1-y) \int_0^x z(x-z) F(z)\, dz.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial M^*}{\partial x} =$$

$$= y \int_0^1 (1-z)^2 F(z)\,dz - \int_0^y (1-y)(y-z) F(z)\,dz - (1-y) \int_0^x zF(z)\,dz$$

et

$$\frac{\partial^2 M^*}{\partial x^2} = -(1-y) xF(x) = \frac{M(x, y)}{E_x I_x} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant y.$$

On a donc pour la poutre appuyée aux deux extrémités

$$G(x, y) = \int_0^1 M(x, z) M(z, y) F(z)\,dz.$$

Est-ce qu'il existe la fonction de Green pour les problèmes aux limites 190-210? Dans l'affirmative, construire cette fonction.

190. $y'' = 0$; $y(0) = y'(1)$, $y'(0) = y(1)$.

191. $y'' = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

192. $y'' + y = 0$; $y(0) = y(\pi) = 0$.

193. $y^{IV} = 0$; $y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

194. $y''' = 0$; $y(0) = y'(1) = 0$, $y'(0) = y(1)$.

195. $y''' = 0$; $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) = y'(1)$.

196. $y'' = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = y'(1)$.

197. $y'' + y' = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

198. $y'' - k^2 y = 0$ $(k \neq 0)$; $y(0) = y(1) = 0$.

199. $y'' + y = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

200. $y''' = 0$; $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) + y'(1) = 0$.

201. $y'' = 0$; $y'(0) = hy(0)$, $y'(1) = -Hy(1)$.

202. $x^2 y'' + 2xy' = 0$; $y(x)$ est borné pour $x \to 0$, $y(1) = \alpha y'(1)$.

203. $x^3 y^{IV} + 6x^2 y''' + 6xy'' = 0$; $y(x)$ est borné pour $x \to 0$, $y(1) = y'(1) = 0$.

204. $x^2 y'' + xy' - y = 0$; $y(x)$ est borné pour $x \to 0$, $y(1) = 0$.

205. $xy'' + y' - \frac{1}{x} y = 0$; $y(0)$ est fini, $y(1) = 0$.

206. $x^2 y'' + xy' - n^2 y = 0$; $y(0)$ est fini, $y(1) = 0$.

207. $x^2 (\ln x - 1) y'' - xy' + y = 0$; $y(0)$ est fini, $y(1) = 0$.

208. $\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] = 0$; $y(0) = 0$, $y(1)$ est fini.

209. $xy'' + y' = 0$; $y(0)$ est borné, $y(l) = 0$.

210. $y'' - y = 0$; $y(0) = y'(0)$, $y(l) + \lambda y'(l) = 0$. (Considérer les cas: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $|\lambda| \neq 1$.)

211. Trouver la fonction de Green pour l'équation

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\alpha x)^4 \frac{dy}{dx}\right] = 0, \qquad \alpha > 0,$$

$$y(0) = y(l) = 0.$$

§ 15. Résolution de problèmes aux limites à l'aide de la fonction de Green

Soit l'équation différentielle avec second membre

$$L[y] \equiv p_0(x)\, y^{(n)}(x) + p_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)\, y(x) = f(x) \quad (1)$$

et les conditions aux limites

$$V_1(y) = 0, \quad V_2(y) = 0, \ \ldots, \ V_n(y) = 0, \qquad (2)$$

les formes linéaires $V_1, V_2, \ldots, V_n$ en $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ étant supposées, comme au paragraphe 14, linéairement indépendantes.

THÉORÈME. *Si $G(x, \xi)$ est la fonction de Green du problème aux limites homogène*

$$L(y) = 0,$$

$$V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

la solution du problème aux limites (1)-(2) *est donnée par la formule*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \qquad (3)$$

(voir [23]).

Exemple 1. Moyennant la fonction de Green résoudre le problème aux limites

$$y''(x) - y(x) = x, \qquad (4)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \qquad (5)$$

Solution. a) Etablissons pour commencer l'existence de la fonction de Green du problème aux limites homogène associé

$$y''(x) - y(x) = 0, \qquad (6)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \qquad (7)$$

$y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ est évidemment le système fondamental de solutions de l'équation (6). La solution générale de (6) est donc

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Les conditions aux limites (5) sont remplies si et seulement si $A = B = 0$, i.e. $y(x) \equiv 0$, et nous avons démontré l'existence de la fonction de Green.

b) On vérifie aisément que

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(\xi - 1)}{\operatorname{sh} 1} & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(x - 1)}{\operatorname{sh} 1} & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{8}$$

est la fonction de Green du problème aux limites (6)-(7).

c) Cherchons la solution du problème (4)-(5) sous la forme

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\, \xi\, d\xi, \tag{9}$$

avec $G(x, \xi)$ défini par la formule (8).

Partageons en deux l'intervalle d'intégration et portons dans (9) l'expression (8) de $G(x, \xi)$, nous obtenons

$$y(x) = \int_0^x \frac{\xi \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\, d\xi + \int_x^1 \frac{\xi \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(\xi - 1)}{\operatorname{sh} 1}\, d\xi =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \xi \operatorname{sh} \xi\, d\xi + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \xi \operatorname{sh}(\xi - 1)\, d\xi.$$

Puisque

$$\int_0^x \xi \operatorname{sh} \xi\, d\xi = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

$$\int_x^1 \xi \operatorname{sh}(\xi - 1)\, d\xi = 1 - x \operatorname{ch}(x-1) + \operatorname{sh}(x-1),$$

on a

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \{\operatorname{sh}(x-1)[x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x] + \operatorname{sh} x [1 - x \operatorname{ch}(x-1) +$$

$$+ \operatorname{sh}(x-1)]\} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - x.$$

Nous nous sommes servi de la formule

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta$$

et du fait que la fonction $\operatorname{sh} x$ est impaire.

Une vérification immédiate montre que la fonction

$$y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - x$$

vérifie l'équation (4) et les conditions aux limites (5).

Exemple 2. Ramener à une équation intégrale le problème aux limites ci-dessous relatif à l'équation différentielle non linéaire :

$$y'' = f(x,\ y(x)), \tag{10}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{11}$$

Solution. Cherchons la fonction de Green du problème

$$y'' = 0, \tag{12}$$

$$y(0) = y(1) = 0; \tag{13}$$

elle est de la forme

$$G(x,\ \xi) = \begin{cases} (\xi - 1)\,x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (x-1)\,\xi, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

En considérant le second membre de l'équation (10) comme une fonction connue, trouvons

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\ \xi)\, f(\xi,\ y(\xi))\, d\xi.$$

Ainsi, la résolution du problème aux limites (10)-(11) se ramène à celle d'une équation intégrale non linéaire du type de Hammerstein (voir [28]) à noyau fonction de Green du problème (12)-(13).

Résoudre les problèmes aux limites suivants à l'aide de la fonction de Green :

212. $y'' + y = x$; $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

213. $y^{IV} = 1$; $y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

214. $xy'' + y' = x$; $y(1) = y(e) = 0$.

215. $y'' + \pi^2 y = \cos \pi x$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

216. $y'' - y = 2 \operatorname{sh} 1$; $y(0) = y(1) = 0$.

217. $y'' - y = -2e^x$; $y(0) = y'(0)$, $y(l) + y'(l) = 0$.

218. $y'' + y = x^2$; $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

§ 16. Problèmes aux limites dépendant d'un paramètre et leur réduction à des équations intégrales

On est souvent conduit à un problème aux limites du type

$$L[y] = \lambda y + h(x), \tag{1}$$

$$V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

où

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)\, y(x),$$

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(les formes linéaires $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont linéairement indépendantes) ; $h(x)$ est une fonction continue de x donnée, λ un paramètre numérique.

Pour $h(x) \equiv 0$, on aboutit au problème aux limites homogène

$$\left.\begin{aligned} L[y] &= \lambda y, \\ V_k(y) &= 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Les valeurs de λ pour lesquelles le problème aux limites (3) admet des solutions $y(x)$ non triviales s'appellent *valeurs propres* de ce problème et ces solutions non triviales *fonctions propres* correspondantes.

THÉORÈME. *Si le problème aux limites*

$$\left.\begin{aligned} L[y] &= 0, \\ V_k(y) &= 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\}$$

possède la fonction de Green $G(x, \xi)$, *le problème aux limites* (1)-(2) *est équivalent à l'équation intégrale de Fredholm*

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{4}$$

où

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi.$$

En particulier, le problème homogène (3) est équivalent à l'équation intégrale homogène

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

REMARQUE. Du moment que $G(x, \xi)$ est un noyau continu, on a pour l'équation intégrale (5) les théorèmes de Fredholm. Aussi cette équation admet-elle un nombre au plus dénombrable de valeurs caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, qui ne peuvent converger qu'à l'infini. Pour toutes les valeurs λ autres que caractéristiques, l'équation non homogène (4) a une solution quel que soit son second membre $f(x)$ continu. Cette solution est donnée par la formule

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x),$$

où $R(x, \xi; \lambda)$ est la résolvante relative au noyau $G(x, \xi)$. Quels que soient x et ξ fixes de $[a, b]$, la fonction $R(x, \xi; \lambda)$ est une fonction méromorphe de λ dont les pôles ne peuvent être que les nombres caractéristiques de l'équation intégrale homogène (5).

Exemple 1. Ramener le problème aux limites

$$y'' + \lambda y = x, \tag{6}$$

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{7}$$

à une équation intégrale.

Solution. Cherchons d'abord la fonction de Green $G(x, \xi)$ du problème homogène correspondant

$$\left.\begin{aligned} y''(x) &= 0, \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Puisque les solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) = 0$ vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ sont respectivement les fonctions $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = x - \frac{\pi}{2}$, cherchons la fonction de Green sous la forme

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\, y_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)\, y_2(x)}{W(\xi)}, & \xi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

avec

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & \xi - \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\xi - 1\right) x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \left(\frac{2}{\pi}x - 1\right) \xi, & \xi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

Prenant (8) pour noyau, nous obtenons pour $y(x)$ l'équation intégrale

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi,$$

où

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} G(x, \xi)\, \xi\, d\xi =$$

$$= \int_0^x \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right) \xi^2\, d\xi + \int_x^{\pi/2} \left(\frac{2\xi}{\pi} - 1\right) x\xi\, d\xi = \frac{1}{6} x^3 - \frac{\pi^2}{24} x.$$

Ainsi, le problème aux limites (6)-(7) s'est réduit à l'équation intégrale

$$y(x) + \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = \frac{1}{6} x^3 - \frac{\pi^2}{24} x.$$

Ramener à des équations intégrales les problèmes aux limites suivants :

219. $y'' = \lambda y + x^2$; $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

220. $y'' = \lambda y + e^x$; $y(0) = y(1) = 0$.

221. $y'' + \frac{\pi^2}{4} y = \lambda y + \cos\frac{\pi x}{2}$; $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$.

222. $y'' + \lambda y = 2x + 1$; $y(0) = y'(1)$, $y'(0) = y(1)$.

223. $y^{IV} = \lambda y + 1$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(1) = y'''(1) = 0$.

224. $y''' + \lambda y = 2x$; $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) = y'(1)$.

225. $y'' + \lambda y = e^x$; $y(0) = y'(0)$, $y(1) = y'(1)$.

226. Transformer l'équation différentielle suivante (qui s'obtient de l'équation d'onde de Schrödinger à potentiel mésique)

$$\frac{d^2y}{dr^2} - k^2 y(r) + V_0 \frac{e^{-r}}{r} y(r) = 0$$

(V_0 et k^2 sont des constantes) dont la solution satisfait aux conditions aux limites

$$y(0) = y(+\infty) = 0,$$

en l'équation intégrale

$$y(r) = V_0 \int_0^{+\infty} G(r, \xi) \frac{e^{-\xi}}{\xi} y(\xi)\, d\xi,$$

où

$$G(r, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{-k\xi} \operatorname{sh} kr, & 0 \leqslant r \leqslant \xi, \\ \frac{1}{k} e^{-kr} \operatorname{sh} k\xi, & \xi \leqslant r < +\infty. \end{cases}$$

CHAPITRE III

APPLICATION DES TRANSFORMATIONS INTÉGRALES À LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS INTÉGRALES

§ 17. Résolution d'équations intégrales par la transformation de Fourier

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce à noyau dépendant de la différence des arguments

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

où $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ et $K(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$.

Appliquant la transformation de Fourier et le théorème de convolution nous obtenons

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + \sqrt{2\pi}\,\Phi(\omega)\,K(\omega), \tag{2}$$

avec $\Phi(\omega)$, $F(\omega)$, $\widetilde{K}(\omega)$ les transformées de Fourier de $\varphi(x)$, $f(x)$, $K(x)$ respectivement. Sous la condition $1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(\omega) \neq 0$, l'égalité (2) donne

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(\omega)}$$

Moyennant la formule d'inversion de la transformation de Fourier, nous trouvons la solution de l'équation (1)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(\omega)}\, e^{ix\omega}\,d\omega.$$

Si, pour certaines valeurs réelles de ω, on a $1 - \sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}(\omega) = 0$, alors l'équation (1) n'admet en général pas de solution absolument intégrable sur l'axe Ox tout entier.

On procède de même dans le cas de l'équation de Fredholm de première espèce à noyau dépendant de la différence des arguments

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x).$$

La solution de cette équation est de la forme

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{\widetilde{K}(\omega)} e^{ix\omega}\, d\omega.$$

Exemple 1. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\varphi(t)\, dt \qquad \left(\lambda < \frac{1}{2}\right).$$

Solution. Soit $F(\omega)$ la transformée de Fourier de la fonction $f(x)$ et $\widetilde{K}(\omega)$ celle du noyau $K(x) = e^{-|x|}$. Ici

$$\widetilde{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ix\omega}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0]}^{+\infty} e^{-x(1+i\omega)} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$$

Transformons par Fourier les deux membres de l'équation proposée, il vient

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2} \Phi(\omega) \sqrt{2\pi},$$

d'où

$$\Phi(\omega) = \frac{1+\omega^2}{1-2\lambda+\omega^2} F(\omega).$$

Donc, l'équation primitive admet comme solution la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\omega^2}{1-2\lambda+\omega^2} F(\omega)\, e^{ix\omega}\, d\omega. \qquad (3)$$

Notons qu'en l'occurrence

$$1 - \sqrt{2\pi}\, \widetilde{K}(\omega)\, \lambda = 1 - \frac{2\lambda}{1+\omega^2} = \frac{1-2\lambda+\omega^2}{1+\omega^2}$$

ne s'annule, lorsque $\lambda < \frac{1}{2}$, pour aucune valeur réelle de ω. Posons par exemple

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

Nous avons

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$$

de sorte que la formule (3) fournit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\omega}}{1-2\lambda+\omega^2}\, d\omega.$$

Calculons la dernière intégrale en recourant aux intégrales de contour (voir [3]). Nous obtenons

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}} \quad \text{pour} \quad x > 0,$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{x\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}} \quad \text{pour} \quad x < 0,$$

en bref,

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x|}}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Exemple 2. Des sources linéiques de champ propre $\overline{E}$ dans un espace non borné créent entre deux plaques parallèles mises à la terre un champ électrostatique plan $(0 < y < h)$.

Trouver la densité $\sigma_0(x)$ et $\sigma_h(x)$ avec laquelle les charges induites sont réparties sur les surfaces des plaques.

Solution. Il est connu que si un conducteur cylindrique de section limitée par un contour L arbitraire est placé dans un champ plan $\overline{E}$, la densité de répartition cherchée vérifie l'équation intégrale

$$\sigma(N) = \frac{E_n(N)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\sigma(M)}{|MN|^2} \cos(\overline{MN}, \widehat{\ } \overline{n})\, dl, \tag{4}$$

où $\overline{n}$ est la normale extérieure en N au contour L et E_n la projection du champ extérieur sur la normale.

Moyennant la formule (4) écrivons l'équation intégrale pour les densités de charges cherchées. Fixons un point $M(x)$ du plan $y = 0$. Si le point variable $N(\xi)$ appartient au même plan, on a $\cos(\overline{MN}, \widehat{\ } \overline{n}) = 0$; si $N(\xi)$ est dans le plan $y = h$, alors (fig. 6)

$$|MN| = \sqrt{(\xi-x)^2+h^2}, \qquad \cos(\overline{MN}, \widehat{\ } \overline{n}) = -\frac{h}{|MN|}.$$

L'équation intégrale (1) se met donc sous la forme

$$\sigma_0(x) = \frac{(E_y)_{y=0}}{2\pi} - \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_h(\xi)}{(\xi-x)^2+h^2}\, d\xi. \tag{5}$$

En choisissant le point $M(x)$ dans le plan $y=h$, nous obtenons de même

$$\sigma_h(x) = -\frac{(E_y)_{y=h}}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_0(\xi)}{(\xi-x)^2+h^2}\,d\xi. \qquad (5')$$

Le système d'équations intégrales (5)-(5′) par rapport aux fonctions $\sigma_0(x)$, $\sigma_h(x)$ sera résolu à l'aide de la transformation de Fourier.

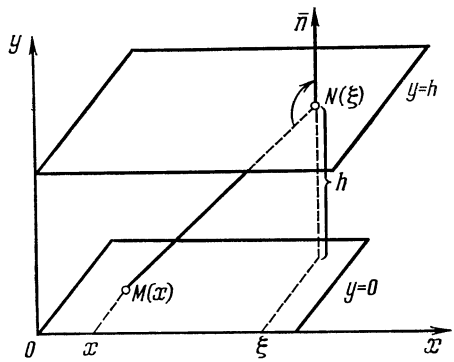

Fig. 6

A cette fin, multiplions chacune de ces équations par $e^{i\lambda x}$ et intégrons par rapport à la variable x de $-\infty$ à $+\infty$. Notant

$$\widetilde{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\,dx$$

et posant, pour abréger l'écriture,

$$(E_y)_{y=0} = f_0(x), \qquad (E_y)_{y=h} = f_h(x),$$

nous avons

$$\widetilde{\sigma}_0 = \frac{\widetilde{f}_0}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_h(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^2+h^2},$$

$$\widetilde{\sigma}_h = -\frac{\widetilde{f}_h}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_0(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^2+h^2}.$$

Changeons l'ordre d'intégration et utilisons la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda t\,dt}{t^2+h^2} = \frac{\pi}{2h}\, e^{-|\lambda| h},$$

nous obtenons le système d'équations algébriques par rapport à $\widetilde{\sigma}_0$ et $\widetilde{\sigma}_h$:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_0 + \widetilde{\sigma}_h e^{-|\lambda|h} &= \frac{\widetilde{f}_0}{2\pi}, \\ \widetilde{\sigma}_0 e^{-|\lambda|h} + \widetilde{\sigma}_h &= -\frac{\widetilde{f}_h}{2\pi}. \end{aligned}\right\}$$

En le résolvant, nous trouvons

$$\widetilde{\sigma}_0 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_h e^{-|\lambda|h}}{1 - e^{-2|\lambda|h}}, \qquad \widetilde{\sigma}_h = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\widetilde{f}_0 e^{-|\lambda|h} + \widetilde{f}_h}{1 - e^{-2|\lambda|h}}.$$

Appliquons la formule d'inversion de la transformation de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda,$$

il vient

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_h e^{-|\lambda|h}}{1 - e^{-|\lambda|h}}\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda,$$

$$\sigma_h(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{f}_h + \widetilde{f}_0 e^{-|\lambda|h}}{1 - e^{-|\lambda|h}}\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda.$$

Résoudre les équations intégrales suivantes:

227. $\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\varphi(t)\, dt \quad \left(\lambda < \frac{1}{2}\right),$

où $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$

228. $\varphi(x) = f(x) + \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\,\varphi(t)\, dt,$

où $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x > 0, \\ e^{x} & \text{pour } x < 0. \end{cases}$

229. $\varphi(x) = f(x) - \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\varphi(t)\, dt.$

Transformation de Fourier en sinus et en cosinus

La fonction

$$\Phi_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xt\, dt$$

est dite *transformée de Fourier en sinus de* $\varphi(x)$.

La fonction

$$\Phi_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt\, dt$$

est dite *transformée de Fourier en cosinus de* $\varphi(x)$.

Les formules des transformations réciproques sont respectivement

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \Phi_s(x) \sin tx\, dx, \\ \varphi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \Phi_c(x) \cos tx\, dx. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Remarque. Si $\varphi(t)$ est paire, alors $\Phi(x) = \Phi_c(x)$; dans le cas contraire, $\Phi(x) = i\Phi_s(x)$, où $\Phi(x)$ est la transformée de Fourier de $\varphi(t)$ et $\Phi_s(x)$, $\Phi_c(x)$ sont ses transformées de Fourier respectivement en sinus et en cosinus.

Exemple 3. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xt\, dt = e^{-x} \qquad (x > 0).$$

Solution. La fonction $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x}$ est évidemment la transformée de Fourier en sinus de la fonction cherchée $\varphi(t)$. Appliquons la formule (6) (formule d'inversion de la transformation de Fourier en sinus), il vient

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x} \sin xt\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin xt\, dx. \qquad (7)$$

La dernière intégrale se calcule en intégrant deux fois par parties. Nous avons

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin tx\, dx = \frac{t}{1+t^2}$$

de sorte que

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{1+t^2}.$$

Exemple 4. Dans les problèmes relatifs aux vibrations d'une mince plaque élastique, on est conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\psi(t) = \frac{1}{2bt} \int_0^{+\infty} x f(x) \sin \frac{x^2}{4bt}\, dx, \tag{8}$$

où $f(x)$ est la fonction inconnue et $\psi(t)$ une fonction donnée.

Solution. C'est une équation intégrale de première espèce. En posant

$$t = \frac{1}{4b\alpha}, \qquad x^2 = v,$$

nous transformons (8) en

$$\frac{1}{\alpha} \psi\left(\frac{1}{4b\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} f(\sqrt{v}) \sin \alpha v\, dv.$$

Utilisons la formule d'inversion de la transformation de Fourier en sinus. Nous avons

$$f(\sqrt{v}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \psi\left(\frac{1}{4b\alpha}\right) \frac{\sin \alpha v}{\alpha}\, d\alpha$$

ou

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t} \sin \frac{x^2}{4bt}\, dt.$$

Résoudre les équations intégrales suivantes :

230. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt\, dt = \frac{1}{1+x^2} \quad (x > 0).$

231. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xt\, dt = f(x),$

où $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

232. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt\, dt = f(x),$

où $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

233. $\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt\, dt = e^{-x} \cos x \quad (x > 0).$

§ 18. Résolution d'équations intégrales par la transformation de Laplace

1. Equations intégrales de Volterra du type convolution

Considérons l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

dont le noyau dépend seulement de la différence $x - t$. Appelons l'équation (1) *équation intégrale du type convolution.*

Soient $f(x)$ et $K(x)$ des fonctions suffisamment régulières qui croissent pour $x \to \infty$ au plus comme une fonction exponentielle, de sorte que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant M_1 e^{s_1 x}, \\ |K(x)| &\leqslant M_2 e^{s_2 x}. \end{aligned} \tag{2}$$

On montre que dans ce cas la fonction $\varphi(x)$ vérifie elle aussi une estimation du type (2), à savoir

$$|\varphi(x)| \leqslant M_3 e^{s_3 x}.$$

On peut donc trouver les images de Laplace des fonctions $f(x)$, $K(x)$ et $\varphi(x)$ (ces images seront définies dans le demi-plan $\operatorname{Re} p = s > \max(s_1, s_2, s_3)$).

Soit

$$f(x) \doteq F(p),$$

$$\varphi(x) \doteq \Phi(p),$$

$$K(x) \doteq \widetilde{K}(p).$$

Effectuant sur les deux membres de (1) la transformation de Laplace et utilisant le théorème du produit, nous trouvons

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{K}(p)\, \Phi(p).$$

D'où

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \widetilde{K}(p)} \qquad (\widetilde{K}(p) \neq 1).$$

L'original $\varphi(x)$ de $\Phi(p)$ est solution de l'équation intégrale (1) (voir [26]).

Exemple 1. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Solution. On sait que

$$\sin x \doteqdot \frac{1}{p^2+1}, \qquad \cos x \doteqdot \frac{p}{p^2+1}.$$

Soit $\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$. Transformant par Laplace les deux membres de l'équation proposée, nous obtenons compte tenu du théorème du produit (image du produit de convolution):

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1}\,\Phi(p).$$

Il en résulte

$$\Phi(p)\left[1 - \frac{2p}{p^2+1}\right] = \frac{1}{p^2+1}$$

ou

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2} \doteqdot xe^x.$$

Par conséquent, l'équation donnée possède pour solution

$$\varphi(x) = xe^x.$$

Résoudre les équations intégrales suivantes:

234. $\varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$

235. $\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

236. $\varphi(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{t-x}\varphi(t)\,dt.$

237. $\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

238. $\varphi(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

239. $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-t)}\,\varphi(t)\,dt.$

240. $\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

241. $\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

242. $\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

243. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2]\,\varphi(t)\,dt.$

244. $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

245. $\varphi(x) = 1 + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

246. $\varphi(x) = e^x + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

247. $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \varphi(t)\,dt.$

On se servira également du théorème du produit pour résoudre des équations intégrales non linéaires de Volterra de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,dt. \tag{3}$$

Soit

$$\varphi(x) \doteqdot \Phi(p), \qquad f(x) \doteqdot F(p).$$

On a alors, en vertu de (3),

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda\Phi^2(p),$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda F(p)}}{2\lambda}.$$

L'original de $\Phi(p)$ (s'il existe) est solution de l'équation intégrale (3).

Exemple 2. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^x \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,dt = \frac{x^3}{6}. \qquad (4)$$

Solution. Soit $\varphi(x) \doteq \Phi(p)$. Par transformation de Laplace terme à terme on obtient, à partir de (4),

$$\Phi^2(p) = \frac{1}{p^4},$$

d'où

$$\Phi(p) = \pm\frac{1}{p^2}.$$

Les fonctions $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = -x$ sont solutions de l'équation (4) (celle-ci admet donc plus d'une solution).

Résoudre les équations intégrales suivantes:

248. $2\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,dt = \sin x.$

249. $\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,dt - \frac{1}{2}\operatorname{sh} x.$

2. Systèmes d'équations intégrales de Volterra du type convolution

On applique la transformation de Laplace à des systèmes d'équations intégrales de Volterra de la forme

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{s} \int_0^x K_{ij}(x-t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad (5)$$

où $K_{ij}(x)$, $f_i(x)$ sont des fonctions continues données possédant la transformée de Laplace.

Après une transformation de Laplace terme à terme, (5) devient un système d'équations algébriques linéaires en $\Phi_j(p)$:

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^{s} \widetilde{K}_{ij}(p)\,\Phi_j(p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

En résolvant ce système, nous trouvons $\Phi_j(p)$ dont les originaux sont justement solutions du système primitif (5).

Exemple 3. Résoudre le système d'équations intégrales

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) &= 4x - \int_0^x \varphi_1'(t)\,dt + 4\int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Solution. En passant aux images et en utilisant le théorème sur la transformée du produit de convolution nous obtenons

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p-2}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{4}{p^2} - \dfrac{1}{p}\Phi_1(p) + \dfrac{4}{p^2}\Phi_2(p). \end{cases}$$

La résolution par rapport à $\Phi_1(p)$ et $\Phi_2(p)$ donne

$$\Phi_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$\Phi_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p+1}$$

Les originaux de $\Phi_1(p)$ et de $\Phi_2(p)$ sont respectivement

$$\varphi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}.$$

Les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sont solution du système initial d'équations intégrales (6).

Résoudre les systèmes d'équations intégrales :

250.
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \displaystyle\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

251
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \displaystyle\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

252.
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

253.
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{t-x}\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

254.
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

255.
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x + \int_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

256.
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + 1 + \int_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x + \int_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \int_0^x \varphi_1(t)\,dt \end{cases}$$

3. Equations intégro-différentielles

Soit l'équation intégro-différentielle linéaire

$$\varphi^{(n)}(x)+a_1\varphi^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n\varphi(x)+$$

$$+\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x-t)\,\varphi^{(m)}(t)dt=f(x), \qquad (7)$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes, $f(x)$, $K_m(x)$ $(m=0, 1, \ldots, s)$ des fonctions données, $\varphi(x)$ la fonction cherchée.

La fonction $\varphi(x)$ est assujettie à des conditions initiales de la forme

$$\varphi(0)=\varphi_0,\quad \varphi'(0)=\varphi_0',\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)}. \qquad (8)$$

Supposons que $f(x)$ et $K_m(x)$ sont deux originaux et que

$$f(x)\doteqdot F(p),\quad K_m(x)\doteqdot \widetilde{K}_m(p)\qquad (m=0, 1, \ldots, s).$$

$\varphi(x)$ admet alors la transformée de Laplace: $\varphi(x)\doteqdot\Phi(p)$. Effectuons sur les deux membres de (7) une transformation de Laplace et utilisons le théorème sur l'image de la dérivée et le théorème du produit, il vient

$$\Phi(p)\left[p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n+\sum_{m=0}^{s}\widetilde{K}_m(p)\,p^m\right]=A(p), \qquad (9)$$

avec $A(p)$ une fonction connue de p. A partir de (9) nous obtenons $\Phi(p)$, solution opérationnelle du problème (7)-(8). La fonction $\varphi(x)\doteqdot\Phi(p)$ est solution de l'équation intégro-différentielle (7) vérifiant les conditions initiales (8).

Exemple 4. Résoudre l'équation intégro-différentielle

$$\varphi''(x)+\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt=e^{2x}, \qquad (10)$$

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0. \qquad (11)$$

Solution. Soit $\varphi(x)\doteqdot\Phi(p)$. En vertu de (11),

$$\varphi'(x)\doteqdot p\Phi(p),\quad \varphi''(x)\doteqdot p^2\Phi(p).$$

Après avoir subi une transformation de Laplace, l'équation (10) s'écrit donc

$$p^2\Phi(p)+\frac{p}{p-2}\,\Phi(p)=\frac{1}{p-2}$$

ou

$$\Phi(p)\,\frac{p(p-1)^2}{p-2}=\frac{1}{p-2}. \qquad (12)$$

Nous trouvons à partir de (12)

$$\Phi(p) = \frac{1}{p(p-1)^2} \doteq xe^x - e^x + 1.$$

Donc, la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégro-différentielle (10) satisfaisant aux conditions initiales (11) est définie par

$$\varphi(x) = xe^x - e^x + 1.$$

Résoudre les équations intégro-différentielles suivantes :

257. $\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt = e^{2x}$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.

258. $\varphi'(x) - \varphi(x) + \int_0^x (x-t)\,\varphi'(t)\,dt - \int_0^x \varphi(t)\,dt = x$; $\varphi(0) = -1$.

259. $\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi''(t)\,dt + 2\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \cos x$; $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

260. $\varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 2\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \cos x$; $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

261. $\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \operatorname{ch} x$; $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

262. $\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \operatorname{ch} x$; $\varphi(0) = -1$, $\varphi'(0) = 1$.

4. Equations intégrales de Volterra sur l'intervalle $(x, +\infty)$

Les équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{13}$$

apparaissant dans certains problèmes de physique, se résolvent également par transformation de Laplace.

On a la formule suivante ([2])

$$\int_x^{+\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \doteqdot \widetilde{\mathcal{K}}(-p)\,\Phi(p), \tag{14}$$

où

$$\varphi(t) \doteqdot \Phi(p), \quad \widetilde{\mathcal{K}}(-p) = \int_0^{+\infty} K(-x)\,e^{px}\,dx.$$

Transformant par Laplace les deux membres de (13) et utilisant (14) nous obtenons

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{\mathcal{K}}(-p)\,\Phi(p)$$

ou

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-\widetilde{\mathcal{K}}(-p)} \qquad (\widetilde{\mathcal{K}}(-p) \neq 1).$$

La fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F(p)}{1-\widetilde{\mathcal{K}}(-p)}\,e^{px}\,dp \tag{15}$$

est une solution particulière de l'équation (13). Notons que pour que la solution (15) ait un sens, il est nécessaire que les domaines d'analyticité de $\widetilde{\mathcal{K}}(-p)$ et de $F(p)$ soient en chevauchement.

Exemple 5. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = x + \int_x^{\infty} e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt. \tag{16}$$

Solution. Dans notre cas $f(x) = x$, $K(x) = e^{2x}$. C'est pourquoi

$$F(p) = \frac{1}{p^2}, \quad \widetilde{\mathcal{K}}(-p) = \int_0^{\infty} e^{-2x}e^{px}\,dx = \frac{1}{2-p}, \quad \operatorname{Re} p < 2.$$

Ainsi nous aboutissons à l'équation opératorielle suivante :

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2-p}\,\Phi(p)$$

de sorte que

$$\Phi(p) = \frac{p-2}{p^2(p-1)}$$

D'où

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px}\, dp \qquad (0 < \gamma < 2). \tag{17}$$

L'intégrale (17) se calcule d'après la formule intégrale de Cauchy. La fonction sous le signe $\int$ possède le pôle double $p = 0$ et le pôle simple $p = 1$ (pour $\gamma > 1$) selon que la solution de (16) comprend ou non la solution de l'équation homogène associée

$$\varphi(x) = \int_x^\infty e^{2(x-t)} \varphi(t)\, dt.$$

Trouvons les résidus de la fonction à intégrer en ses pôles. On a

$$\operatorname*{res}_{p=0} \left(\frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px} \right) = 2x + 1, \qquad \operatorname*{res}_{p=1} \left(\frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px} \right) = -e^x.$$

L'équation intégrale (16) admet donc comme solution $\varphi(x) = 2x + 1 + Ce^x$ (C étant une constante quelconque).

Résoudre les équations intégrales :

263. $\varphi(x) = e^{-x} + \int_x^\infty \varphi(t)\, dt.$

264. $\varphi(x) = e^{-x} + \int_x^\infty e^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

265. $\varphi(x) = \cos x + \int_x^\infty e^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

266. $\varphi(x) = 1 + \int_x^\infty e^{\alpha(x-t)} \varphi(t)\, dt \qquad (\alpha > 0).$

5. Théorème généralisé du produit et certaines applications

Soit

$$\varphi(x) \doteqdot \Phi(p), \qquad u(x, \tau) \doteqdot U(p)\, e^{-\tau q(p)},$$

avec $U(p)$ et $q(p)$ des fonctions analytiques. Alors

$$\Phi(q(p))\, U(p) \doteqdot \int_0^\infty \varphi(\tau)\, u(x, \tau)\, d\tau.$$

C'est le *théorème généralisé du produit* (*théorème d'Efros*). Si $u(x, \tau) = u(x - \tau)$, alors $q(p) \equiv p$, et nous avons le théorème classique :

$$\Phi(p) \cdot U(p) \doteqdot \int_0^\infty \varphi(\tau)\, u(x - \tau)\, d\tau.$$

Si $U(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, on a

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\, e^{-\frac{\tau^2}{4x}}.$$

Sachant que $\Phi(p) \doteqdot \varphi(x)$, on trouve donc selon le théorème d'Efros l'original de $\dfrac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty \varphi(\tau)\, e^{-\frac{\tau^2}{4x}}\, d\tau. \tag{18}$$

Exemple 6. Résoudre l'équation intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}}\, \varphi(t)\, dt = 1. \tag{19}$$

Solution. Soit $\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$. Effectuons sur (19) une transformation de Laplace terme à terme, il vient, conformément à la formule (18) :

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p},$$

d'où

$$\frac{\Phi(p)}{p} = \frac{1}{p^2} \quad \text{ou} \quad \Phi(p) = \frac{1}{p} \doteqdot 1.$$

Par conséquent, $\varphi(x) \equiv 1$ est solution de (19).

Résoudre les équations intégrales suivantes :

267. $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = e^{-x}$.

268. $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = 2x - \operatorname{sh} x$.

269. $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = x^{\frac{3}{2}} + e^{4x}$.

Il est connu que

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où $J_n(z)$ est une fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. En particulier,

$$J_0(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}.$$

En vertu du théorème de similitude

$$J_0(2\sqrt{xt}) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{p}},$$

et on doit donc prendre pour le théorème d'Efros

$$q(p) \equiv \frac{1}{p}.$$

Exemple 7. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = xe^{-x} + \lambda \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\, \varphi(t)\, dt \qquad (|\lambda| \neq 1). \tag{20}$$

Solution. Soit $\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$. Transformons par Laplace les deux membres de (20), il vient, compte tenu du théorème d'Efros,

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \lambda \frac{1}{p} \Phi\left(\frac{1}{p}\right). \tag{21}$$

Après la substitution $p = \frac{1}{p}$, nous trouvons

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p \Phi(p). \tag{22}$$

(21) et (22) permettent d'obtenir

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda}{p}\left[\frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p \Phi(p)\right]$$

ou

$$\Phi(p) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda p}{(p+1)^2}\right].$$

Il en découle

$$\varphi(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right).$$

Résoudre les équations intégrales ($\lambda \neq \pm 1$):

270. $\varphi(x) = e^x + \lambda \int_0^\infty \sqrt{\frac{x}{t}}\, J_1(2\sqrt{xt})\, \varphi(t)\, dt.$

271. $\varphi(x) = \cos x + \lambda \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\, \varphi(t)\, dt.$

272. $\varphi(x) = \cos x + \lambda \int_0^\infty \frac{x}{t} J_2(2\sqrt{xt})\, \varphi(t)\, dt.$

273. $\varphi(x) = \sin x + \lambda \int_0^\infty \sqrt{\frac{x}{t}}\, J_1(2\sqrt{xt})\, \varphi(t)\, dt.$

§ 19. Résolution d'équations intégrales par la transformation de Mellin

Etant donné une fonction $f(t)$ définie pour t positifs et vérifiant les conditions

$$\int_0^1 |f(t)|\, t^{\sigma_1 - 1}\, dt < +\infty, \qquad \int_1^\infty |f(t)|\, t^{\sigma_2 - 1}\, dt < +\infty \tag{1}$$

pour un choix convenable des nombres σ_1 et σ_2, on appelle *transformée de Mellin* de $f(t)$ la fonction

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1}\, dt \quad (s = \sigma + i\tau, \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2). \tag{2}$$

La formule d'inversion de la transformation de Mellin s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)\, t^{-s}\, ds \qquad (t > 0,\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2), \tag{3}$$

l'intégrale étant prise le long d'une droite l: $\operatorname{Re} s = \sigma$, parallèle à l'axe imaginaire du plan des s, et comprise au sens de la valeur principale. Dans le cas où l'on connaît (en se guidant par exemple sur des considérations physiques) le comportement de la fonction $f(t)$ lorsque $t \to 0$ et $t \to \infty$, les frontières de la bande (σ_1, σ_2) peuvent être établies à partir des conditions de convergence absolue de l'intégrale (2). Si le comportement de $f(t)$ n'est par contre connu qu'à l'une extrémité de l'intervalle $(0, +\infty)$, disons quand $t \to 0$, seul σ_1 est défini, et la droite d'intégration l de (3) doit être choisie à droite de $\sigma = \sigma_1$ et à gauche du plus proche point singulier de la fonction $F(s)$.

Il existe un lien étroit entre la transformation que nous étudions, d'une part, et la transformation de Fourier et celle de Laplace, de l'autre. De nombreux théorèmes relatifs à la première peuvent s'obtenir par changement de variables à partir des théorèmes correspondants pour les deux dernières.

Le théorème du produit pour la transformation de Mellin a la forme

$$M\left\{\int_0^\infty f(t)\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\} = F(s)\cdot\Phi(s). \tag{4}$$

On en conclut que cette transformation est tout indiquée pour résoudre des équations intégrales telles que

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty K\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,\frac{dt}{t}. \tag{5}$$

En effet, supposons que $\varphi(x)$, $f(x)$ et $K(x)$ admettent la transformée de Mellin et soit $\varphi(x) \to \Phi(s)$, $f(x) \to F(s)$, $K(x) \to \widetilde{K}(s)$, les domaines dans lesquels $F(s)$ et $\widetilde{K}(s)$ sont analytiques ayant en commun la bande $\sigma_1 < \operatorname{Re} s = \sigma < \sigma_2$. Appliquant la transformation de Mellin terme à terme et utilisant le théorème (4), nous obtenons, à partir de (5),

$$\Phi(s) = F(s) + \widetilde{K}(s)\cdot\Phi(s),$$

d'où

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1-\widetilde{K}(s)} \qquad (\widetilde{K}(s) \neq 1).$$

C'est la solution opérationnelle de l'équation intégrale (5). La formule d'inversion (3) permet d'en trouver la solution $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(s)}{1-\widetilde{K}(s)}\,x^{-s}\,ds.$$

Considérons l'équation intégrale de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty K(x \cdot t)\, \varphi(t)\, dt \tag{6}$$

(équation de Fox). Multiplions les deux membres de (6) par x^{s-1} et intégrons par rapport à x entre 0 et ∞, il vient

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx + \int_0^\infty \varphi(t)\, dt \int_0^\infty K(x \cdot t)\, x^{s-1}\, dx.$$

Notons $\Phi(s)$, $F(s)$, $\widetilde{K}(s)$ les transformées de Mellin respectives des fonctions $\varphi(x)$, $f(x)$, $K(x)$. Nous obtenons par de simples transformations

$$\Phi(s) = F(s) + \widetilde{K}(s) \int_0^\infty \varphi(t)\, t^{-s}\, dt. \tag{7}$$

On voit aisément que $\int_0^\infty \varphi(t)\, t^{-s}\, dt = \Phi(1-s)$ de sorte que (7) s'écrit

$$\Phi(s) = F(s) + \Phi(1-s)\, \widetilde{K}(s). \tag{8}$$

Substituant dans (8) $1 - s$ à s nous trouvons

$$\Phi(1-s) = F(1-s) + \Phi(s)\, \widetilde{K}(1-s). \tag{9}$$

Les égalités (8) et (9) entraînent

$$\Phi(s) = F(s) + F(1-s)\, \widetilde{K}(s) + \Phi(s)\, \widetilde{K}(s)\, \widetilde{K}(1-s),$$

d'où

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\, \widetilde{K}(s)}{1 - \widetilde{K}(s) \cdot \widetilde{K}(1-s)}. \tag{10}$$

C'est la solution opérationnelle de l'équation (6).

Moyennant la formule de réciprocité de Mellin on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(s) + F(1-s)\, \widetilde{K}(s)}{1 - \widetilde{K}(s)\, \widetilde{K}(1-s)}\, x^{-s}\, ds,$$

qui est solution de l'équation intégrale (6).

Exemple. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(t) \cos xt\, dt. \tag{11}$$

Solution. On a

$$\widetilde{K}(s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{s-1} \cos x \, dx. \tag{12}$$

Le calcul de l'intégrale (12) se fait compte tenu de ce que

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} \, dx = \Gamma(z). \tag{13}$$

Faisons coïncider dans (13) la demi-droite d'intégration avec l'axe imaginaire, opération possible pour $0 < z < 1$ en vertu du lemme de Jordan. Nous obtenons la formule

$$\int_0^\infty e^{-ix} x^{z-1} \, dx = e^{-\frac{i\pi z}{2}} \Gamma(z).$$

Séparons les parties réelle et imaginaire, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{z-1} \cos x \, dx &= \cos \frac{\pi z}{2} \cdot \Gamma(z), \\ \int_0^\infty x^{z-1} \sin x \, dx &= \sin \frac{\pi z}{2} \cdot \Gamma(z). \end{aligned} \tag{14}$$

Ainsi, en vertu de (12) et (14)

$$\widetilde{K}(s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}.$$

Ensuite

$$\widetilde{K}(s) \cdot \widetilde{K}(1-s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \cdot \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\pi} 2 \cos \frac{\pi s}{3} \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \lambda^2$$

puisque $\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$. Par conséquent, si $M\{f(x)\} = F(s)$, on a conformément à la formule (10) (pour $|\lambda| \neq 1$)

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\,\widetilde{K}(s)}{1-\lambda^2},$$

et donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i (1-\lambda^2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[F(s) + F(1-s) \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \right] x^{-s} \, ds =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\, x^{-s}\, ds +$$

$$+ \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} F(1-s)\, x^{-s}\, ds. \quad (15)$$

Remplaçons $F(1-s)$ par $\int_0^\infty f(t)\, t^{-s}\, dt$ dans la dernière intégrale du second membre de (15) et notons que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\, x^{-s}\, ds = f(x)$. La formule (15) se récrit :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} (xt)^{-s}\, ds \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

Selon la formule de réciprocité de Mellin,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} (xt)^{-s}\, ds = \cos xt$$

de sorte qu'on a en définitive pour solution de l'équation (11) :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos xt\, dt.$$

Résoudre les équations intégrales suivantes :

274. $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi(t) \cos xt\, dt.$

275. $\varphi(x) = f(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(t) \sin xt\, dt.$

276. $\varphi(x) = -e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varphi(t) \cos xt\, dt.$

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE

§ 20. Equations intégrales de Volterra de première espèce

Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad f(0) = 0, \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue.

Supposons que $K(x, t)$, $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont continus pour $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$. Dérivons (1) terme à terme par rapport à x, il vient

$$K(x, x)\,\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\,\varphi(t)\,dt = f'(x). \tag{2}$$

Toute solution $\varphi(x)$ continue pour $0 \leqslant x \leqslant a$ de l'équation (1) vérifie évidemment (2). Inversement, toute solution continue pour $0 \leqslant x \leqslant a$ de l'équation (2) vérifie (1).

Si $K(x, x)$ ne s'annule en aucun point de l'intervalle fondamental $[0, a]$, l'équation (2) se récrit comme suit :

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} - \int_0^x \frac{K'_x(x, t)}{K(x, x)}\,\varphi(t)\,dt, \tag{3}$$

i. e. elle se ramène à l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce considérée plus haut (voir [22]).

Si, par contre, $K(x, x) \equiv 0$, il y a parfois intérêt à dériver une deuxième fois l'équation (2) par rapport à x, et ainsi de suite.

REMARQUE. Si $K(x, x)$ s'annule en un point $x \in [0, a]$, par exemple en $x = 0$, l'équation (3) acquiert des propriétés foncièrement différentes de celles d'une équation de seconde espèce (dans ce cas Picard parle d'équations de troisième espèce). On voit alors surgir des difficultés qui font penser à l'annulation du coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé d'une équation différentielle linéaire.

Exemple. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^x \cos(x - t)\,\varphi(t)\,dt = x. \tag{4}$$

Solution. Les fonctions $f(x) = x$, $K(x, t) = \cos(x - t)$ remplissent les conditions de continuité et de dérivabilité formulées plus haut.

En dérivant les deux membres de (4) par rapport à x nous trouvons

$$\varphi(x)\cos 0 - \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = 1$$

ou

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{5}$$

une équation intégrale de seconde espèce du type convolution.

Trouvons sa solution en la transformant par Laplace :

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+1}\,\Phi(p),$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{p^2+1}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} \doteq 1 + \frac{x^2}{2}$$

La fonction $\varphi(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ est solution de l'équation (5) et donc, ce qu'on vérifie de suite, celle de l'équation de départ (4).

Résoudre les équations intégrales de première espèce suivantes après les avoir réduites à des équations de seconde espèce :

277. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

278. $\int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\,dt = x.$

279. $\int_0^x a^{x-t}\varphi(t)\,dt = f(x),\ f(0) = 0.$

280. $\int_0^x (1 - x^2 + t^2)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x^2}{2}.$

281. $\int_0^x (2 + x^2 - t^2)\,\varphi(t)\,dt = x^2.$

282. $\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = e^{x^2/2} - 1.$

283. Ramener

$$\int_a^x \frac{H(x, s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s)\, ds = f(x)$$

à une équation de Volterra de seconde espèce en supposant que $H(x, s)$ et $f(x)$ sont continûment dérivables, $f(a) = 0$, $H(a, a) \neq 0$ et $0 < \alpha < 1$.

§ 21. Equations intégrales de Volterra de première espèce du type convolution

Appelons *équation intégrale de première espèce du type convolution* l'équation

$$\int_0^x K(x-t) \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{1}$$

dont le noyau $K(x, t)$ n'est fonction que de la différence $x - t$.

Cette classe d'équations comprend par exemple l'équation d'Abel généralisée.

Considérons un problème qui nous conduit à une équation intégrale de Volterra du type convolution.

Un magasin achète et vend toutes sortes de marchandises. On suppose que

1) l'achat et la vente sont des processus continus; les marchandises achetées sont immédiatement mises en vente;

2) toute marchandise est acquise en quantité susceptible d'être écoulée en un temps T, le même pour tous les articles;

3) chaque nouveau lot est vendu uniformément durant cette période T.

Le magasin met en vente une marchandise dont le coût total est l'unité. On demande la loi $\varphi(t)$ régissant ses achats de façon que le coût du stock reste constant.

Solution. Soit $K(t)$ le coût du stock à l'instant t avec

$$K(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T}, & t \leqslant T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Supposons que durant l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$ le magasin achète pour $\varphi(\tau)\, d\tau$ francs. Ce lot étant mis en vente immédiatement, à l'instant $t > \tau$ il n'en reste que pour $K(t - \tau) \varphi(\tau)\, d\tau$ francs. Ainsi, à tout instant t, le coût s'écrit

$$\int_0^t K(t-\tau) \varphi(\tau)\, d\tau.$$

La fonction $\varphi(t)$ doit donc vérifier l'équation intégrale

$$1 - K(t) = \int_0^t K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Nous avons abouti à une équation intégrale de Volterra de première espèce du type convolution.

Soient $f(x)$ et $K(x)$ deux originaux et

$$f(x) \doteqdot F(p), \quad K(x) \doteqdot \widetilde{K}(p), \quad \varphi(x) \doteqdot \Phi(p).$$

Effectuant sur (1) une transformation de Laplace terme à terme et utilisant le théorème de convolution nous avons

$$\widetilde{K}(p)\cdot\Phi(p) = F(p),$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{\widetilde{K}(p)} \qquad (\widetilde{K}(p) \neq 0). \tag{2}$$

L'original $\varphi(x)$ de la fonction $\Phi(p)$ définie par l'égalité (2) est solution de l'équation intégrale (1).

Exemple. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x. \tag{3}$$

Solution. Transformons par Laplace les deux membres de (3), il vient

$$\frac{1}{p-1}\,\Phi(p) = \frac{1}{p^2},$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \doteqdot 1 - x.$$

La fonction $\varphi(x) = 1 - x$ est solution de l'équation (3).

Résoudre les équations intégrales

284. $\displaystyle\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

285. $\displaystyle\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x.$

286. $\displaystyle\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)\,dt = x^{\frac{5}{2}}.$

287. $\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

288. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x^2.$

289. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x\sin x.$

290. $\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^3e^{-x}.$

291. $\int_0^x J_0(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

292. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x.$

293. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

294. $\int_0^x (x^2-t^2)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x^3}{3}.$

295. $\int_0^x (x^2-4xt+3t^2)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x^4}{12}.$

296. $\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-4xt+3t^2)\,\varphi(t)\,dt = x^2J_4(2\sqrt{x}).$

297. $\int_0^x (x-2t)\,\varphi(t)\,dt = -\frac{x^3}{6}.$

Remarque. Si $K(x, x) = K(0) \neq 0$, l'équation (1) a nécessairement une solution. Dans l'Exercice 290, le noyau $K(x, t)$ s'annule identiquement pour $t = x$, mais l'équation correspondante admet bien une solution.

Une condition nécessaire d'existence d'une solution continue d'une équation intégrale de la forme

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{4}$$

est, nous l'avons déjà dit, que la fonction $f(x)$ possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre n inclusivement et que ses $n-1$ premières dérivées s'annulent toutes pour $x=0$.

L'équation « modèle » (4) montre la nécessité d'une concordance entre l'ordre d'annulation du noyau pour $t=x$ et celui du second membre $f(x)$ pour $x=0$ (l'ordre d'annulation de $f(x)$ doit être supérieur d'au moins 1).

Considérons l'équation intégrale

$$\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x. \tag{5}$$

Ici $f(x)=x$, $n=2$. Il est évident que $f(x)$ a des dérivées de tous les ordres, mais sa dérivée première $f'(x)=1\neq 0$, c'est-à-dire que la condition nécessaire n'est pas remplie.

Appliquant formellement une transformation de Laplace aux deux membres de (5) nous obtenons

$$\frac{1}{p^2}\,\Phi(p) = \frac{1}{p^2},$$

d'où

$$\Phi(p) = 1.$$

C'est l'image de la fonction delta — $\delta(x)$.

Rappelons que

$$\delta(x) \doteqdot 1, \qquad \delta^{(m)}(x) \doteqdot p^m,$$

m étant entier $\geqslant 0$.

Ainsi, l'équation intégrale (5) admet pour solution la fonction delta :

$$\varphi(x) = \delta(x).$$

On le vérifie immédiatement en se rappelant que le produit de convolution de $\delta(x)$ avec toute fonction régulière $g(x)$ est défini par les égalités suivantes :

$$g(x) * \delta(x) = g(x),$$

$$\delta^{(k)}(x) * g(x) = g^{(k)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

En effet, dans notre cas $g(x) = K(x) = x$ et

$$\int_0^x K(x-t)\,\delta(t)\,dt = K(x) = x.$$

Ainsi, l'équation (5) admet bien une solution, mais cette solution est dans la classe de distributions (voir [12]).

Résoudre les équations intégrales

298. $\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^2 + x - 1.$

299. $\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x.$

300. $\int_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt = x^2 + x^3.$

301. $\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + 1.$

302. $\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt = 1 - \cos x.$

Les équations intégrales de première espèce à noyau logarithmique

$$\int_0^x \varphi(t) \ln(x-t)\,dt = f(x), \qquad f(0) = 0, \tag{6}$$

se résolvent elles aussi moyennant la transformation de Laplace. On sait que

$$x^\nu \doteqdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \qquad (\operatorname{Re}\nu > -1). \tag{7}$$

Dérivons la relation (7) par rapport à ν:

$$x^\nu \ln x \doteqdot \frac{1}{p^{\nu+1}} \frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu} + \frac{1}{p^{\nu+1}} \ln\frac{1}{p}\,\Gamma(\nu+1)$$

ou

$$x^\nu \ln x \doteqdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \left[\frac{\frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu}}{\Gamma(\nu+1)} + \ln\frac{1}{p}\right]. \tag{8}$$

Lorsque $\nu = 0$, on a (voir p. 28)

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \quad (\gamma \text{ étant la constante d'Euler}),$$

et la formule (8) prend la forme

$$\ln x \doteqdot \frac{1}{p}(-\gamma - \ln p) = -\frac{\ln p + \gamma}{p}. \tag{9}$$

Soit $\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$, $f(x) \doteqdot F(p)$. Transformant (6) terme à terme par Laplace et utilisant la formule (9), nous trouvons

$$-\Phi(p)\frac{\ln p+\gamma}{p} = F(p),$$

d'où

$$\Phi(p) = -\frac{pF(p)}{\ln p+\gamma}.$$

Ecrivons $\Phi(p)$ sous la forme

$$\Phi(p) = -\frac{p^2F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} - \frac{f'(0)}{p(\ln p+\gamma)}. \tag{10}$$

Puisque $f(0) = 0$, on a

$$p^2F(p) - f'(0) \doteqdot f''(x). \tag{11}$$

Revenons à la formule (7) que nous écrivons maintenant

$$\frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \doteqdot \frac{1}{p^{\nu+1}}. \tag{12}$$

Intégrons les deux membres de (12) par rapport à ν de 0 à ∞. Il vient

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \doteqdot \int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p\ln p}.$$

Conformément au théorème de similitude,

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu a^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \doteqdot \frac{1}{p\ln(ap)} = \frac{1}{p(\ln p+\ln a)}.$$

En posant $a = e^\gamma$, nous obtenons

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \doteqdot \frac{1}{p(\ln p+\gamma)}. \tag{13}$$

Utilisons l'égalité (10). En vertu de (13),

$$\frac{f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} \doteqdot f'(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu.$$

Compte tenu de (11) et (13), le premier terme à droite dans (10) peut être considéré comme produit d'images. On trouve son original à l'aide du théorème de convolution :

$$\frac{p^2F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} \doteqdot \int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\right)dt.$$

La solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale (6) s'écrit donc

$$\varphi(x) = -\int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\right)dt - f'(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu$$

(γ est la constante d'Euler).

En particulier, lorsque $f(x) = x$, on a

$$\varphi(x) = -\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu$$

§ 22. Equations intégrales de Fredholm de première espèce

On appelle *équation intégrale de Fredholm de première espèce* une équation de la forme

$$\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1}$$

contenant la fonction inconnue $\varphi(x)$ seulement sous le signe $\int$.

Le problème de résolubilité de telles équations à noyau $K(x, t)$ aussi « bon » que l'on veut et au second membre $f(x)$ présente de sérieuses difficultés.

Prenons par exemple l'équation

$$\int_0^1 (3x^2t + xt^2 + t^3)\,\varphi(t)\,dt = \sin x. \tag{2}$$

On voit sans peine que, quelle que soit $\varphi(t)$ continue, le premier membre de (2) devient par intégration un polynôme de la forme

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

qui pour aucune valeur des coefficients A, B, C n'est identiquement égal sur [0, 1] à la fonction $\sin x$, second membre de (2). Par conséquent, cette équation ne possède pas de solution dans la classe de fonctions intégrables sur [0, 1].

THÉORÈME DE PICARD. *Une équation intégrale de Fredholm de première espèce admet une solution et une seule dans la classe $L_2(a, b)$ si*

1° *Le noyau $K(x, t)$ est réel symétrique.*

2° *La série*

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 f_k^2 \tag{3}$$

est convergente. Ici λ_k *sont les nombres caractéristiques du noyau* $K(x, t)$ *et*

$$f_k = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx, \tag{4}$$

où $\varphi_k(x)$ *sont les fonctions propres de* $K(x, t)$ *correspondant aux nombres caractéristiques* λ_k.

3° *Le système de fonctions propres* $\{\varphi_k(x)\}$ *est complet sur* $[a, b]$. *La solution de l'équation* (1) *s'obtient dans ce cas comme*

$$\varphi(x) = \sum_k \lambda_k f_k \varphi_k(x). \tag{5}$$

Exemple 1. Résoudre l'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \sin^3 \pi x, \tag{6}$$

avec

$$K(x, t) = \begin{cases} (1-x)\,t, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ x\,(1-t), & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

Solution. Les nombres caractéristiques relatifs au noyau (7) sont

$$\lambda_1 = \pi^2, \quad \lambda_2 = (2\pi)^2, \quad \ldots, \quad \lambda_n = (n\pi)^2, \quad \ldots,$$

et les fonctions propres correspondantes

$$\varphi_1(x) = \sqrt{2}\sin \pi x, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi x, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = \\ = \sqrt{2}\sin n\pi x, \quad \ldots \tag{8}$$

La question de la résolubilité de l'équation (6) pour un noyau $K(x, t)$ défini par la formule (7) est tranchée à l'aide du théorème de Picard. La condition 1° de ce théorème est évidemment remplie : le noyau (7) est réel et symétrique.

Le second membre de (6) est susceptible de la représentation suivante :

$$\sin^3 \pi x = \frac{3}{4}\sin \pi x - \frac{1}{4}\sin 3\pi x$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin^3 \pi x = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\sin \pi x\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\sin 3\pi x\right) = \\ = \frac{3}{4\sqrt{2}}\,\varphi_1(x) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\varphi_3(x),$$

avec $\varphi_1(x)$ et $\varphi_3(x)$ deux fonctions propres du système (8). Le développement de

$$f(x) = \sin^3 \pi x$$

suivant les fonctions du système (8) a donc pour coefficients

$$f_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad f_k = 0 \qquad (k \geqslant 4).$$

Dans le présent cas, la série (3) se réduit à une somme finie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 = \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 (\pi^2)^2 + \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 (3^2\pi^2)^2 = \frac{45}{16}\pi^4,$$

d'où la condition 2°.

Le système de fonctions propres (8) étant orthonormé complet sur [0, 1], la condition 3° est remplie elle aussi.

Selon le théorème de Picard, l'équation (6) admet une solution unique de la forme (5) :

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_1 \varphi_1(x) + \lambda_3 f_3 \varphi_3(x),$$

ce qui donne en l'occurrence

$$\varphi(x) = \frac{3\pi^2}{4}(\sin \pi x - 3 \sin 3\pi x). \tag{9}$$

Une substitution immédiate confirme notre résultat.

La condition assujettissant le système de fonctions propres $\{\varphi_k(x)\}$ à être complet est essentielle. Illustrons-le sur l'exemple suivant.

Exemple 2.

$$\int_0^1 t\varphi(t) = \frac{1}{3}. \tag{10}$$

Solution. Recourant à la méthode de recherche de nombres caractéristiques et de fonctions propres (§ 10), nous constatons que le nombre caractéristique du noyau donné est $\lambda = 2$ et la fonction propre correspondante $\psi(x) = 1$.

Un « système » de fonctions propres réduit à la seule fonction $\psi(x) = 1$ ne saurait être complet sur [0, 1]. Le théorème de Picard n'assure donc pas l'unicité de la solution de l'équation (10).

On constate par substitution immédiate que l'équation (10) admet par exemple pour solutions des trinômes de la forme

$$\varphi(x) = x + \alpha x^2 + \beta x^3$$

si les coefficients α et β sont reliés par la condition $5\alpha + 4\beta = 0$.

De telles solutions sont évidemment toutes de $L_2(0, 1)$.

Est-ce que les équations intégrales suivantes admettent des solutions?

303. $\int_0^1 (3x-2)\, t\varphi(t)\, dt = x^3+3x-1.$

304. $\int_0^{2\pi} \cos(x+t)\, \varphi(t)\, dt = \pi \cos x.$

305. $\int_0^{\pi} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 3\sin x - \sin 3x,$

où $K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{t(\pi-x)}{\pi}, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{x(\pi-t)}{\pi}, & x \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$

Méthode des fonctions génératrices

On appelle *fonction génératrice* du système

$$g_0(t),\ g_1(t),\ \ldots,\ g_n(t),\ \ldots \tag{11}$$

une fonction $G(x, t)$ telle que

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(t)\, x^n, \tag{12}$$

avec c_n des constantes.

Soit l'équation intégrale

$$\int_a^b K(x, t)\, \rho(t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{13}$$

où le noyau $K(x, t)$ est la fonction génératrice $G(x, t)$ d'un système de fonctions $\{g_k(t)\}$ réel et orthogonal sur l'intervalle (a, b) avec le poids $\rho(t) > 0$ et $f(x)$ une fonction analytique au voisinage du point $x = 0$. Cherchons la solution de (13) sous la forme

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g_i(x), \tag{14}$$

où a_i sont des constantes à déterminer. Portons (12) et (14) dans l'équation (13), il vient, en vertu de l'orthogonalité de $\{g_k(t)\}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n \| g_n(t) \|^2 x^n = f(x), \tag{15}$$

où

$$\| g_n(t) \|^2 = \int_a^b g_n^2(t)\, \rho(t)\, dt.$$

On a à partir de (15)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n! c_n \| g_n \|^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Le report des valeurs de a_n dans (14) donne la solution cherchée qui est unique si le système (11) est complet.

Exemple 3. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)\, dt}{\sqrt{1+x^2-2xt}} = x+1. \tag{16}$$

Solution. La fonction

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}}$$

est la fonction génératrice des polynômes de Legendre $P_n(t)$:

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\, x^n. \tag{17}$$

Cherchons la solution de (16) sous la forme

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i(x). \tag{18}$$

En portant (17) et (18) dans (16) et en nous rappelant que

$$\| P_n \|^2 = \frac{2}{2n+1},$$

nous aboutissons à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{2n+1}\, x^n = x+1.$$

D'où $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_n = 0$ $(n \geqslant 2)$. Nous avons donc pour solution de l'équation proposée

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{2} P_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x.$$

Exemple 4. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x} e^{-t} \varphi(t)\, dt = 1-x, \qquad |x| < 1. \tag{19}$$

Solution. La fonction

$$G(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x}$$

est la fonction génératrice des polynômes de Tchebycheff-Laguerre $L_n(t)$:

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\, x^n. \tag{20}$$

La solution de l'équation (19) est cherchée sous la forme

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(t). \tag{21}$$

Substituons (20) et (21) dans (19), il vient

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} L_n(t)\, x^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(t)\, dt = 1 - x.$$

Du moment que les polynômes de Tchebycheff-Laguerre sont orthogonaux sur l'intervalle $(0, \infty)$ avec le poids $\rho(t) = e^{-t}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 x^n a_n = 1 - x. \tag{22}$$

Nous avons utilisé le fait que

$$\| L_n \|^2 = \int_0^{\infty} e^{-t} L_n^2(t)\, dt = (n!)^2.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de (22) nous obtenons

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_k = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Par conséquent,

$$\varphi(t) = L_0(t) - L_1(t) = 1 - (1 - t) = t.$$

Donc $\varphi(t) = t$.

Appliquer la méthode des fonctions génératrices aux équations intégrales suivantes:

306. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)\, dt}{\sqrt{1 + x^2 - 2xt}} = 2x^3 - 2x.$

307. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{1+x^2-2xt}} = \frac{1}{1-x}.$

308. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x} e^{-t}\varphi(t)\,dt = 2-x^2.$

Equation intégrale de Schlömilch

On donne cette appellation à une équation intégrale de la forme

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \varphi(x \sin\theta)\,d\theta, \tag{23}$$

où $f(x)$ possède une dérivée continue $f'(x)$ pour $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ et $\varphi(x)$ est la fonction inconnue.

Montrons que l'équation (23) admet une solution unique continûment dérivable sur le segment $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, à savoir

$$\varphi(x) = f(0) + x \int\limits_{0}^{\pi/2} f'(x \sin\theta)\,d\theta.$$

On obtient à partir de (23)

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \varphi(0)\,d\theta = \varphi(0) \quad \text{ou} \quad \varphi(0) = f(0).$$

Dérivons l'équation (23) terme à terme par rapport à x, il vient

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \varphi'(x \sin\theta) \sin\theta\,d\theta. \tag{24}$$

La substitution $x = x \sin\psi$ dans (24) donne

$$f'(x\sin\psi) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \varphi'(x \sin\psi \sin\theta) \sin\theta\,d\theta. \tag{25}$$

Multiplions les deux membres de (25) par x et intégrons par rapport à ψ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ nous obtenons

$$x \int\limits_{0}^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\,d\psi = \frac{2x}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} \left\{ \int\limits_{0}^{\pi/2} \varphi'(x\sin\psi\sin\theta)\sin\theta\,d\theta \right\} d\psi$$

et, après avoir interverti l'ordre d'intégration à droite,

$$x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\,d\psi=\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\pi/2}\varphi'(x\sin\psi\sin\theta)\sin\theta\,d\psi\right\}d\theta. \tag{26}$$

Introduisons une nouvelle variable selon la formule

$$\sin\chi=\sin\theta\sin\psi, \tag{27}$$

d'où

$$\cos\chi\,d\chi=\sin\theta\cos\psi\,d\psi$$

de sorte que

$$\frac{\cos\chi}{\cos\psi}\,d\chi=\sin\theta\,d\psi.$$

Pour $\psi=0$, on a $\sin\chi=0$, i.e. $\chi=0$, et pour $\psi=\frac{\pi}{2}$, χ vaut θ. L'égalité (26) s'écrit

$$x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\,d\psi=\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\theta}\frac{\varphi'(x\sin\chi)\cos\chi}{\cos\psi}\,d\chi\right\}d\theta. \tag{28}$$

En vertu de la relation (27), on a

$$\sin\psi=\frac{\sin\chi}{\sin\theta},\quad \cos\psi=\frac{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\chi}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{\cos^2\chi-\cos^2\theta}}{\sin\theta}. \tag{29}$$

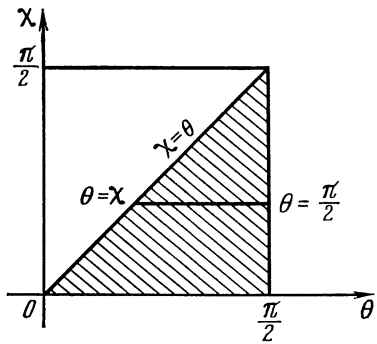

Fig. 7

La substitution de (29) dans le second membre de (28) et l'interversion de l'ordre d'intégration (fig. 7) donnent

$$x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\,d\psi=\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\theta}\frac{\varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\chi-\cos^2\theta}}\,d\chi\right\}d\theta=$$

$$=\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\int_{\chi}^{\pi/2}\frac{\varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\chi-\cos^2\theta}}\,d\theta\right\}d\chi. \tag{30}$$

Nous avons

$$\int_{\chi}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos^2\chi - \cos^2\theta}} = -\arcsin\frac{\cos\theta}{\cos\chi}\Big|_{\theta=\chi}^{\theta=\pi/2} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

La relation (30) prend donc la forme

$$x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\, d\psi = x\int_0^{\pi/2} \varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\, d\chi. \tag{31}$$

Or

$$x\int_0^{\pi/2} \varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\, d\chi = \int_0^{\pi/2} d\varphi(x\sin\chi) =$$

$$= \varphi(x\sin\chi)\Big|_{\chi=0}^{\chi=\pi/2} = \varphi(x) - \varphi(0). \tag{32}$$

Puisque $\varphi(0) = f(0)$, nous obtenons en définitive, à partir de (31) et (32),

$$\varphi(x) = f(0) + x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin\psi)\, d\psi. \tag{33}$$

Exemple 5. Résoudre l'équation

$$x^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \varphi(x\sin\theta)\, d\theta. \tag{34}$$

Solution. L'équation proposée est une équation de Schlömilch, où $f(x) = x^2$, et donc $f(0) = 0$. On trouve la dérivée : $f'(x) = 2x$. Moyennant la formule (33) nous obtenons

$$\varphi(x) = x\int_0^{\pi/2} 2(x\sin\psi)\, d\psi = -2x^2\cos\psi\Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi/2} = 2x^2.$$

Réponse : $\varphi(x) = 2x^2$.

Une substitution directe de $\varphi(x) = 2x^2$ dans (34) nous convainc de la justesse du résultat.

Résoudre les équations intégrales des trois exercices suivants :

309. $1 + x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \varphi(x\sin\theta)\, d\theta.$

310. $3x^2 + 2x^3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \varphi(x\cos\theta)\, d\theta.$

311. $1 + x^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/6} \varphi(x\sin 3\theta)\, d\theta.$

CHAPITRE V

MÉTHODES DE RÉSOLUTION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

§ 23. Remplacement du noyau d'une équation intégrale par un noyau dégénéré

Soit donnée l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{1}$$

avec un noyau $K(x, t)$ quelconque. En se rappelant (§ 9) que la résolution d'une équation à noyau dégénéré s'avère simple, on pense naturellement à remplacer de façon approchée le noyau $K(x, t)$ donné par un noyau dégénéré $L(x, t)$ et à accepter la solution $\widetilde{\varphi}(x)$ de la nouvelle équation

$$\widetilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b L(x, t)\, \widetilde{\varphi}(t)\, dt$$

pour solution approchée de l'équation proposée (1). On peut prendre pour ce noyau dégénéré $L(x, t)$ une série partielle de Taylor ou de Fourier de la fonction $K(x, t)$ par rapport à tout système de fonctions $\{u_n(x)\}$ complet orthonormé dans $L_2(a, b)$, etc. Indiquons certaines estimations d'erreurs sur la solution de (1) dues au remplacement du noyau donné par un noyau dégénéré.

Soit donnés deux noyaux $L(x, t)$ et $K(x, t)$. Supposons que

$$\int_a^b |K(x, t) - L(x, t)|\, dt < h,$$

que la résolvante $R_L(x, t; \lambda)$ de l'équation à noyau $L(x, t)$ vérifie l'inégalité

$$\int_a^b |R_L(x, t; \lambda)|\, dt < R$$

et que $|f(x) - f_1(x)| < \eta$. Sous l'hypothèse

$$1 - |\lambda| h (1 + |\lambda| R) > 0.$$

l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt + f(x)$$

possède alors une seule solution $\varphi(x)$, et l'écart entre $\varphi(x)$ et $\widetilde{\varphi}(x)$, solution de l'équation

$$\widetilde{\varphi}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b L(x, t)\, \widetilde{\varphi}(t)\, dt,$$

est inférieur à

$$|\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)| < \frac{N|\lambda|(1+|\lambda| R)^2 h}{1-|\lambda| h (1+|\lambda| R)} + \eta,$$

où N est la borne supérieure de $|f(x)|$ (voir [15]).

Pour le noyau dégénéré $L(x, t)$ la résolvante $R_L(x, t; \lambda)$ se calcule aisément : si $L(x, t) = \sum_{k=1}^{n} X_k(x)\, T_k(t)$ et si l'on pose

$$\int_a^b X_k(x)\, T_s(x)\, dx = a_{sk},$$

on a

$$R_L(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)},$$

où

$$D(x, t; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & \dots & X_n(x) \\ T_1(t) & 1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(t) & -\lambda a_{n1} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Les racines de $D(\lambda)$ sont les nombres caractéristiques du noyau $L(x, t)$.

Effectuons une autre évaluation ($\lambda = 1$). Soit

$$K(x, t) = L(x, t) + \Lambda(x, t),$$

$L(x, t)$ étant le noyau dégénéré et $\Lambda(x, t)$ possédant une petite norme dans une métrique. Supposons ensuite que $R_K(x, t)$,

$R_L(x, t)$, sont les résolvantes respectives des noyaux $K(x, t)$, $L(x, t)$ et $\|\Lambda\|$, $\|R_K\|$, $\|R_L\|$ les normes des opérateurs aux noyaux correspondants. Alors

$$\|\varphi - \widetilde{\varphi}\| \leqslant \|\Lambda\| (1 + \|R_K\|) (1 + \|R_L\|) \|f\|, \qquad (2)$$

la norme dans (2) pouvant être prise dans n'importe quel espace fonctionnel. La norme de la résolvante R de tout noyau $K(x, t)$ est évaluée par

$$\|R\| \leqslant \frac{\|K\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|}.$$

Ceci étant, on a dans l'espace $C(0, 1)$ de fonctions continues sur le segment $[0, 1]$

$$\|K\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 |K(x, t)| \, dt,$$

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|,$$

et dans l'espace de fonctions de carré sommable sur $\Omega \{a \leqslant x, t \leqslant b\}$

$$\|K\| \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) \, dx \, dt \right)^{1/2},$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{1/2}.$$

Exemple. Résoudre l'équation

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x \cos xt) \varphi(t) \, dt,$$

en remplaçant son noyau par un noyau dégénéré.

Solution. Par développement en série du noyau $K(x, t) = 1 - x \cos xt$, nous obtenons

$$K(x, t) = 1 - x + \frac{x^3 t^2}{2} - \frac{x^5 t^4}{24} + \ldots \qquad (3)$$

Prenons pour noyau dégénéré $L(x, t)$ les trois premiers termes du développement :

$$L(x, t) = 1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}$$

et proposons-nous de résoudre une nouvelle équation :

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sin x + \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}\right) \widetilde{\varphi}(t)\, dt. \tag{4}$$

Celle-ci donne

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sin x + C_1 (1 - x) + C_2 x^3, \tag{5}$$

où

$$C_1 = \int_0^1 \widetilde{\varphi}(t)\, dt, \qquad C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \widetilde{\varphi}(t)\, dt. \tag{6}$$

Le rapport de (5) dans (6) fournit un système pour déterminer C_1 et C_2. Nous avons

$$C_1 = \int_0^1 [\sin t + C_1 (1 - t) + C_2 t^3]\, dt = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{4} C_2 + 1 - \cos 1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 [t^2 \sin t + C_1 (t^2 - t^3) + C_2 t^5]\, dt =$$

$$= \frac{1}{24} C_1 + \frac{1}{12} C_2 + \sin 1 - 1 + \frac{1}{2} \cos 1$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4} C_2 &= 1 - \cos 1, \\ -\frac{1}{24} C_1 + \frac{11}{12} C_2 &= \sin 1 + \frac{1}{2} \cos 1 - 1. \end{aligned}\right\}$$

Résolvons ce système :

$$C_1 = 1{,}0031, \qquad C_2 = 0{,}1674,$$

donc

$$\widetilde{\varphi}(x) = 1{,}0031\ (1 - x) + 0{,}1674 x^3 + \sin x.$$

La solution exacte est $\varphi(x) \equiv 1$.

Evaluons $\| \varphi - \widetilde{\varphi} \|$ d'après la formule (2). Nous obtenons dans la métrique de L_2 :

$$\| \Lambda \| \leqslant \frac{1}{24} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 x^{10} t^8\, dx\, dt \right\}^{1/2} = \frac{1}{72\sqrt{11}} < \frac{1}{238},$$

$$\| K \| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1 - x \cos xt)^2\, dx\, dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2 \cos 1 - \frac{1}{8} \cos 2 + \frac{1}{16} \sin 2 - \frac{5}{6} \right\}^{1/2} < \frac{3}{5},$$

$$\| L \| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}\right)^2 dx\, dt \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{14}} < \frac{3}{5},$$

$$\| f \| = \left\{ \int_0^1 \sin^2 x\, dx \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{2 - \sin 2}}{2} < \frac{3}{5}.$$

Les normes des résolvantes R_K et R_L sont évaluées par

$$\| R_K \| \leqslant \frac{\| K \|}{1 - |\lambda| \cdot \| K \|}, \qquad \| R_L \| \leqslant \frac{\| L \|}{1 - |\lambda| \cdot \| L \|},$$

où $|\lambda| = 1$. Par conséquent, $\| R_K \| \leqslant \frac{3}{2}$, $\| R_L \| \leqslant \frac{3}{2}$ et donc

$$\| \varphi - \tilde{\varphi} \| < \frac{1}{238} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{2}\right) \frac{3}{5} < 0{,}016.$$

Résoudre les équations intégrales suivantes par le procédé décrit dans ce paragraphe et évaluer l'erreur commise sur la solution :

312. $\varphi(x) = e^x - x - \int_0^1 x\,(e^{xt} - 1)\,\varphi(t)\,dt.$

313. $\varphi(x) = x + \cos x + \int_0^1 x\,(\sin xt - 1)\,\varphi(t)\,dt.$

314. $\varphi(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + 3x - 1) + \int_0^1 (e^{-xt^2} - 1)\,x\varphi(t)\,dt.$

315. $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + \int_0^1 (1 - \cos xt^2)\,x\varphi(t)\,dt.$

§ 24. Remplacement de l'intégrale par une somme finie

Soit l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

où $K(x, t)$ et $f(x)$ admettent des dérivées continues d'ordre requis et λ est un nombre donné.

Prenons une formule de quadrature

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi(x_k), \tag{2}$$

avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les abscisses des points de $[a, b]$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les coefficients indépendants de la forme de la fonction $\Phi(x)$.

Posons $x = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dans l'équation (1), il vient

$$\varphi(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x_k), \tag{3}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Moyennant la formule (2) remplaçons l'intégrale de la dernière équation par une somme:

$$\varphi(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m K(x_k, x_m)\, \varphi(x_m) = f(x_k), \tag{4}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous avons obtenu un système linéaire de n équations algébriques à n inconnues $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$, valeurs approchées de la solution $\varphi(x)$ aux points de base $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut prendre pour solution approchée de l'équation (1) sur le segment $[a, b]$ la fonction suivante:

$$\widetilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m K(x, x_m)\, \varphi(x_m),$$

dont les valeurs aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont respectivement $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$.

Voici les valeurs des coefficients A_k et des abscisses x_k de (2):

1) formule des rectangles:

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \ldots, \quad x_n = a + (n-1)h;$$

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = h, \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n};$$

2) formule des trapèzes:

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \ldots, \quad x_n = a + (n-1)h = b;$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = h, \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n-1};$$

3) formule de Simpson $(n = 2m + 1)$:

$$x_1 = a, \; x_2 = a + h, \; \ldots, \; x_{2m+1} = a + 2mh = b;$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, \quad A_2 = A_4 = \ldots = A_{2m} = \frac{4h}{3},$$

$$A_3 = A_5 = \ldots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}, \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{2m}.$$

Pour le choix de la formule de quadrature et l'évaluation de l'erreur résultant de la méthode consulter [1] et [15].

Exemple. Trouver une valeur approchée de la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x)+\int_0^1 x\,(e^{xt}-1)\,\varphi(t)\,dt=e^x-x. \tag{5}$$

Solution. Fixons sur le segment [0, 1] les points $x_1=0$, $x_2=0{,}5$, $x_3=1$ et posons $x=0$, $x=0{,}5$, $x=1$ dans l'équation proposée. Nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0)&=1,\\ \varphi(0{,}5)+0{,}5\int_0^1 (e^{0{,}5t}-1)\,\varphi(t)\,dt&=e^{0{,}5}-0{,}5,\\ \varphi(1)+\int_0^1 (e^t-1)\,\varphi(t)\,dt&=e-1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Remplaçons, à l'aide de la formule de Simpson

$$\int_0^1 \Phi(t)\,dt\approx\frac{\Phi(0)+4\Phi(0{,}5)+\Phi(1)}{6},$$

chacune des intégrales par une somme finie. On a pour l'intégrande de la deuxième équation du système (6):

$$\Phi(t)=\frac{e^{0{,}5t}-1}{2}\,\varphi(t)$$

de sorte que

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi(0{,}5)=\frac{e^{0{,}25}-1}{2}\,\varphi(0{,}5),\quad \Phi(1)=\frac{e^{0{,}5}-1}{2}\,\varphi(1).$$

Ainsi,

$$0{,}5\int_0^1 (e^{0{,}5t}-1)\,\varphi(t)\,dt\approx\frac{e^{0{,}25}-1}{4}\,\varphi(0{,}5)+\frac{e^{0{,}5}-1}{12}\,\varphi(1). \tag{7}$$

La fonction à intégrer de la troisième équation est

$$\Phi(t)=(e^t-1)\,\varphi(t),$$

donc

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi(0{,}5)=(e^{0{,}5}-1)\,\varphi(0{,}5),\quad \Phi(1)=(e-1)\,\varphi(1),$$

et, par conséquent,

$$\int_0^1 (e^t-1)\,\varphi(t)\,dt\approx\frac{4\,(e^{0{,}5}-1)\,\varphi(0{,}5)+(e-1)\,\varphi(1)}{6}. \tag{8}$$

Portons (7) et (8) dans (6), il vient le système linéaire

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(0)=1, \\ \frac{e^{0,25}+2}{3}\varphi(0,5)+\frac{e^{0,5}-1}{12}\varphi(1)=e^{0,5}-0,5, \\ \frac{2(e^{0,5}-1)}{3}\varphi(0,5)+\frac{e+5}{6}\varphi(1)=e-1 \end{array}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(0)=1, \\ 1,0947\cdot\varphi(0,5)+0,0541\cdot\varphi(1)=1,1487, \\ 0,4325\cdot\varphi(0,5)+1,2864\cdot\varphi(1)=1,7183. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Résolvons le système (9):

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi(0,5)=0,9999, \quad \varphi(1)=0,9996.$$

Prenons pour solution approchée de l'équation (5) la fonction

$$\widetilde{\varphi}(x)=e^x-x-\sum_{m=1}^{3}A_m x\,(e^{xx_m}-1)\,\varphi(x_m),$$

où $x_1=0$, $x_2=0,5$, $x_3=1$, $A_1=\frac{1}{6}$, $A_2=\frac{2}{3}$, $A_3=\frac{1}{6}$, ou

$$\widetilde{\varphi}(x)=e^x-x\,(0,6666e^{0,5x}+0,1666e^x)-0,1668x.$$

La solution exacte de l'équation intégrale proposée est $\varphi(x)\equiv 1$.

Résoudre les équations intégrales ci-dessous en remplaçant l'intégrale par une somme finie:

316. $\varphi(x)+\int_0^1 xe^{xt}\varphi(t)\,dt=e^x$.

317. $\varphi(x)-\int_0^1 \frac{x+t}{1+x+t}\varphi(t)\,dt=\ln\frac{2+x}{1+x}$.

318. $\varphi(x)+\pi\int_0^1 x^2\cos\pi xt\cdot\varphi(t)\,dt=\pi x(1+\sin\pi x)-2\sin^2\frac{\pi x}{2}$.

§ 25. Méthode des approximations successives

1. Equations intégrales de Volterra de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \qquad (1)$$

Supposons que $f(x)$ est continue dans $[0, a]$ et que le noyau $K(x, t)$ l'est pour $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$.

Prenons une fonction $\varphi_0(x)$ continue dans $[0, a]$ et substituons-la à $\varphi(x)$ du second membre de (1):

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi_0(t)\, dt.$$

La fonction $\varphi_1(x)$ ainsi définie est continue elle aussi sur le segment $[0, a]$. En continuant le processus nous aboutissons à la suite

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots,$$

où

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi_{n-1}(t)\, dt.$$

Sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $K(x, t)$, la suite $\{\varphi_n(x)\}$ converge pour $n \to \infty$ vers la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale (1) (voir [2]).

Si l'on prend, en particulier, pour $\varphi_0(x)$ la fonction $f(x)$, $\varphi_n(x)$ seront justement les sommes partielles de la série (2) (§ 3) donnant la solution de (1). Un choix heureux de l'approximation « d'ordre zéro » $\varphi_0(x)$ peut avoir pour résultat la convergence rapide de la suite $\{\varphi_n(x)\}$ vers la solution de l'équation intégrale.

Exemple 1. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\, dt$$

par la méthode des approximations successives en posant $\varphi_0(x) \equiv 0$.

Solution. Du moment que $\varphi_0(x) \equiv 0$, on a $\varphi_1(x) = 1$. Puis, de proche en proche,

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + x,$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + t)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

On a de toute évidence

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc $\varphi_n(x)$ est la n-ième somme partielle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. D'où $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x$. On vérifie aisément que la fonction $\varphi(x) = e^x$ est solution de l'équation proposée.

Appliquer la méthode des approximations successives aux équations intégrales suivantes:

319. $\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt$; $\varphi_0(x) \equiv 0$.

320. $\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt$; $\varphi_0(x) \equiv 0$.

321. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt$; $\varphi_0(x) = 1$.

322. $\varphi(x) = x + 1 - \int_0^x \varphi(t)\,dt$;

a) $\varphi_0(x) = 1$, b) $\varphi_0(x) = x + 1$.

323. $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \varphi(t)\,dt$;

a) $\varphi_0(x) = 1$, b) $\varphi_0(x) = x$, c) $\varphi_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$.

324. $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt$; $\varphi_0(x) = 1$.

325. $\varphi(x) = 2x + 2 - \int_0^x \varphi(t)\,dt$;

a) $\varphi_0(x) = 1$, b) $\varphi_0(x) = 2$.

326. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t)\,dt$;

a) $\varphi_0(x)=2$, b) $\varphi_0(x)=2x$.

327. $\varphi(x)=\frac{x^3}{3}-2x-\int_0^x \varphi(t)\,dt$; $\varphi_0(x)=x^2$.

328. En supposant que $K(x, t)$ vérifie la condition

$$\int_0^a \int_0^x K^2(x, t)\,dt\,dx<+\infty,$$

démontrer que l'équation

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt=0$$

admet, quel que soit λ, une seule solution $\varphi(x)\equiv 0$ dans la classe $L_2(0, a)$.

On utilisera également la méthode étudiée pour des équations intégrales non linéaires de Volterra de la forme

$$y(x)=y_0+\int_0^x F[t, y(t)]\,dt \tag{2}$$

ou des équations plus générales

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x F(x, t, \varphi(t))\,dt \tag{3}$$

sous des hypothèses très larges sur les fonctions $F(x, t, z)$ et $f(x)$. L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=F(x, y), \qquad y|_{x=0}=y_0,$$

se ramène par exemple à une équation de la forme (2).

Comme dans le cas d'équations intégrales linéaires, nous cherchons la solution de (3) sous forme de limite de la suite $\{\varphi_n(x)\}$, où par exemple $\varphi_0(x)=f(x)$ et les termes suivants $\varphi_k(x)$ se calculent de proche en proche d'après la formule

$$\varphi_k(x)=f(x)+\int_0^x F(x, t, \varphi_{k-1}(t))\,dt \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Si $f(x)$ et $F(x, t, z)$ sont de carré sommable et satisfont aux conditions

$$|F(x, t, z_2) - F(x, t, z_1)| \leqslant a(x, t)\,|z_2 - z_1|,$$

$$\left|\int_0^x F(x, t, f(t))\,dt\right| \leqslant n(x), \tag{5}$$

avec $a(x, t)$ et $n(x)$ tels qu'on ait dans le domaine fondamental $(0 \leqslant t \leqslant x \leqslant a)$:

$$\int_0^a n^2(x)\,dx \leqslant N^2, \qquad \int_0^a dx \int_0^x a^2(x, t)\,dt \leqslant A^2,$$

alors l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce (3) possède une solution et une seule, à savoir $\varphi(x) \in L_2(0, a)$, définie comme la limite de $\varphi_n(x)$ lorsque $n \to \infty$:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x),$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ étant calculées par les formules de récurrence (4). On peut prendre pour $\varphi_0(x)$ n'importe quelle fonction de $L_2(0, a)$ (en particulier, une fonction continue) qui remplit la condition (5). Notons qu'un bon choix de l'approximation initiale est susceptible de faciliter la résolution de l'équation.

Exemple 2. Utiliser la technique des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2}\,dt,$$

en prenant pour approximation initiale 1) $\varphi_0(x) = 0$, 2) $\varphi_0(x) = x$.

Solution. 1) On a alors

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} x,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{1+\operatorname{arc\,tg}^2 t}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}^3 x.$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \frac{1+\left(\operatorname{arc\,tg}\, t+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}^3 t\right)^2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\, x+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}^3 x+\frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arc\,tg}^5 x+\frac{1}{7\cdot 9}\operatorname{arc\,tg}^7 x,$$

$$\varphi_4(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arc\,tg}\, x+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}^3 x+\frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arc\,tg}^5 x+$$

$$+\frac{17}{5\cdot 7\cdot 9}\operatorname{arc\,tg}^7 x+\frac{38}{5\cdot 7\cdot 9^2}\operatorname{arc\,tg}^9 x+\frac{134}{9\cdot 11\cdot 21\cdot 25}\operatorname{arc\,tg}^{11} x+$$

$$+\frac{4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}\operatorname{arc\,tg}^{13} x+\frac{1}{7^2\cdot 9^2\cdot 15}\operatorname{arc\,tg}^{15} x, \ldots$$

En notant $\operatorname{arc\,tg}\, x = u$ et en identifiant l'expression de $\varphi_n(x)$ au développement

$$\operatorname{tg} u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}B_{2\nu}u^{2\nu-1}, \qquad |u|<\frac{\pi}{2},$$

où B_ν sont les nombres de Bernoulli *), on voit que

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\, x) = x.$$

On vérifie sans peine que $\varphi(x) = x$ est solution de l'équation proposée.

2) Plaçons-nous dans le second cas. On a alors

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt = x.$$

On trouve de même $\varphi_n(x) = x$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

La suite $\{\varphi_n(x)\}$ est donc une suite stationnaire $\{x\}$ tendant vers $\varphi(x) = x$. On obtient de suite la solution

$$\varphi(x) = x$$

de l'équation intégrale donnée.

*) Les nombres de Bernoulli $B_{2\nu+1}$ d'indice impair sont tous nuls, sauf $B_1 = -\frac{1}{2}$. $B_0 = 1$ et les nombres $B_{2\nu}$ sont définis par formules de récurrence

$$B_{2\nu} = -\frac{1}{2\nu+1}+\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{2\nu-2}\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(2\nu-2k+2)}{k!}R_k.$$

Dans les trois exercices suivants on demande d'utiliser la méthode des approximations successives.

329. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t+\varphi(t)}\,dt.$$

330. Trouver l'approximation $\varphi_2(x)$ de la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x [\varphi^2(t) + t\varphi(t) + t^2]\,dt.$$

331. Trouver l'approximation $\varphi_3(x)$ de la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^x [t\varphi^2(t) - 1]\,dt.$$

2. Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{6}$$

Construisons la suite fonctionnelle $\{\varphi_n(x)\}$ moyennant la formule de récurrence

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt. \tag{7}$$

On considère les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ comme les valeurs approchées de la solution cherchée de (6), l'approximation initiale $\varphi_0(x)$ pouvant être arbitraire.

Dans la condition

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad \text{où} \quad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\,dx\,dt},$$

la suite (7) converge vers la solution de l'équation (6) dans la métrique de $L_2(a, b)$. L'erreur sur la $(m+1)$-ième approximation est évaluée en module par l'inégalité

$$|\varphi(x)-\varphi_{m+1}(x)|\leqslant AB^{-1}|\lambda B|^{m+1}\left(\Phi+\frac{F}{1-|\lambda B|}\right), \tag{8}$$

où

$$F=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,,\quad \Phi=\sqrt{\int_a^b \varphi_0^2(x)\,dx}\,,$$

$$A=\sqrt{\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^b K^2(x,t)\,dt}\,.$$

Exemple 3. En procédant par approximations successives trouver la solution de l'équation

$$\varphi(x)=\int_0^1 xt^2\varphi(t)\,dt+1 \tag{9}$$

et évaluer l'erreur sur la solution approchée.

Solution. Acceptons comme approximation de départ la valeur $\varphi_0(x)\equiv 1$. Alors

$$\varphi_1(x)=\int_0^1 xt^2\cdot 1\cdot dt+1=1+\frac{x}{3},$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^1 xt^2\left(1+\frac{t}{3}\right)dt+1=1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right),$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^1 xt^2\left[1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right)\right]dt+1=1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right).$$

On voit aisément que

$$\varphi_{m+1}(x)=1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^m}\right).$$

D'où

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_{m+1}(x)=1+\frac{4}{9}x.$$

Une vérification immédiate nous assure que

$$\varphi(x)=1+\frac{4}{9}x$$

est solution de l'équation (9).

L'erreur sur la $(m+1)$-ième approximation est évaluée par l'inégalité (8). Dans notre cas

$$\lambda=1,\quad \Phi=1,\quad F=1,\quad A=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad B=\frac{1}{\sqrt{15}},$$

de sorte que

$$|\varphi(x)-\varphi_{m+1}(x)|\leqslant\frac{29+\sqrt{15}}{14\sqrt{5}(\sqrt{15})^m}.$$

Résoudre par la méthode des approximations successives les équations 332 et 333:

332. $\varphi(x)=x+4\int_0^1 x^2t^2\varphi(t)\,dt.$

333. $\varphi(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt\,\varphi(t)\,dt.$

334. Trouver la troisième approximation $\varphi_3(x)$ de la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x)=1+\int_0^1 K(x,\,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

où

$$K(x,\,t)=\begin{cases} t, & x\geqslant t,\\ x, & x\leqslant t,\end{cases}$$

et évaluer l'erreur commise.

Notons que la difficulté majeure de la méthode des approximations successives réside dans le calcul des intégrales des formules (7). Du moment qu'on a alors recours à des formules d'intégration approchée, il y a intérêt, dans ce cas également, à remplacer d'abord le noyau donné par un noyau dégénéré en développant en série de Taylor, puis à procéder par itérations.

3. Equations intégrales de Fredholm de première espèce

Soit l'équation de Fredholm de première espèce

$$\int_a^b K(x,\,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{10}$$

à $K(x,\,t)$ symétrique, de carré sommable, défini positif et $f(x)\in L_2[a,\,b]$.

Supposons que (10) admet une solution unique.

La suite $\{\varphi_n(x)\}$ définie par la relation

$$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)+\lambda\left[f(x)-\int_a^b K(x,\,t)\,\varphi_n(t)\,dt\right], \tag{11}$$

où $\varphi_0(x) \in L_2[a, b]$ et $0 < \lambda < 2\lambda_1$ (λ_1 étant le plus petit nombre caractéristique du noyau $K(x, t)$), converge alors en moyenne vers la solution de l'équation proposée.

Exemple 4. Considérons l'équation intégrale

$$\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \sin \pi x,$$

où

$$K(x, t) = \begin{cases} (1-x)\,t, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ (1-t)\,x, & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{12}$$

Il est immédiat de vérifier qu'elle admet la solution $\varphi(x) = \pi^2 \sin \pi x$ et cette solution seulement.

Le noyau (12) a pour le plus petit nombre caractéristique la valeur $\lambda_1 = \pi^2$.

Formons les approximations selon la formule (11) en partant de $\varphi_0(x) = 0$ et $\lambda = 1 < 2\lambda_1$. Nous obtenons de proche en proche

$$\varphi_1(x) = \sin \pi x,$$

$$\varphi_2(x) = \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin \pi x,$$

$$\varphi_3(x) = \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^2 \sin \pi x,$$

. . . . . .

$$\varphi_{n+1}(x) = \sin \pi x \cdot \left[1 + \left(-1\frac{1}{\pi^2}\right) + \left(-1\frac{1}{\pi^2}\right)^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^n\right].$$

On voit aisément que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \pi^2 \sin \pi x$$

donne la solution exacte de l'équation proposée.

Résoudre par approximations successives les équations suivantes :

335. $\displaystyle\int_0^{\pi} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2} \sin 2x,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{t(\pi - x)}{\pi}, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{x(\pi - t)}{\pi}, & x \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

336. $\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{9}\cos 3x,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{x^2+t^2}{2} + \frac{1}{3} - x, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \frac{x^2+t^2}{2} + \frac{1}{3} - t, & x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

§ 26. Méthode de Boubnov-Galerkin

Soit à chercher une solution approchée de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

par la méthode de Boubnov-Galerkin. On choisit un système de fonctions $\{u_n(x)\}$ complet dans $L_2(a, b)$ et tel que, quel que soit n, les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, . . ., $u_n(x)$ soient linéairement indépendantes, et on cherche une solution approchée $\varphi_n(x)$ de la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x). \tag{2}$$

Les coefficients a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) se définissent à partir du système linéaire

$$(\varphi_n(x),\ u_k(x)) = (f(x),\ u_k(x)) + \lambda\left(\int_a^b K(x, t)\,\varphi_n(t)\,dt,\ u_k(x)\right) \tag{3}$$

où (f, g) désigne $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ et où on remplace $\varphi_n(x)$ par $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$. Si la valeur de λ dans (1) n'est pas un nombre caractéristique, alors, pour n suffisamment grands, le système (3) admet une solution unique, et, lorsque $n \to \infty$, la solution approchée $\varphi_n(x)$ de (2) tend, dans la métrique de $L_2(a, b)$, vers la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (1).

Exemple. Résoudre par le procédé de Boubnov-Galerkin l'équation suivante:

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Solution. Choisissons pour système complet sur $[-1, 1]$ un système de polynômes de Legendre $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ et cherchons une solution approchée $\varphi_n(x)$ de (4) de la forme

$$\varphi_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2}.$$

Portons dans (4) $\varphi_3(x)$ à la place de $\varphi(x)$, il vient

$$a_1 + a_2 x + a_2 \frac{3x^2-1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt \left(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2-1}{2} \right) dt$$

ou

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + x \frac{2}{3} a_2. \tag{5}$$

En multipliant successivement les deux membres de la dernière équation par 1, x, $\frac{3x^2-1}{2}$ et en intégrant par rapport à x de -1 à 1, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} 2a_1 &= 0, \\ \frac{2}{3} a_2 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} a_2, \\ \frac{2}{5} a_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

d'où $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$ et donc $\varphi_3(x) = 3x$. On vérifie de suite que c'est la solution exacte de (4).

Recourir à la méthode de Boubnov-Galerkin pour résoudre les équations intégrales suivantes :

337. $\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^{1} (xt + x^2) \varphi(t)\, dt.$

338. $\varphi(x) = 1 + \frac{4}{3} x + \int_{-1}^{1} (xt^2 - x) \varphi(t)\, dt.$

339. $\varphi(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \int_{-1}^{1} x^2 e^{xt} \varphi(t)\, dt.$

REMARQUE. S'agissant de noyaux dégénérés la méthode que nous étudions fournit la solution exacte et, dans le cas général, cette technique équivaut à remplacer le noyau $K(x, t)$ par celui dégénéré $L(x, t)$.

§ 27. Recherche des nombres caractéristiques et des fonctions propres des noyaux symétriques

1. Méhode de Ritz

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

à noyau symétrique: $K(x, t) \equiv K(t, x)$.

Prenons une suite de fonctions $\{\psi_n(x)\}$, $\psi_n(x) \in L_2(a, b)$, telle que le système $\{\psi_n(x)\}$ soit complet dans $L_2(a, b)$ et que, pour tout n, les fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, . . ., $\psi_n(x)$ soient linéairement indépendantes sur $[a, b]$. Posons

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x) \tag{1}$$

assujettissons les coefficients a_k à la condition $\| \varphi_n \| = 1$ et cherchons dans cette condition les valeurs stationnaires de la forme quadratique

$$(K\varphi_n, \varphi_n).$$

Nous aboutissons ainsi au système linéaire homogène en a_k (σ est le multiplicateur de Lagrange)

$$\sum_{k=1}^{n} \{(K\psi_j, \psi_k) - \sigma(\psi_j, \psi_k)\}\, a_k = 0 \tag{2}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour que le système (2) admette une solution non banale, son déterminant doit être nul:

$$\begin{vmatrix} (K\psi_1, \psi_1) - \sigma(\psi_1, \psi_1) & \ldots & (K\psi_1, \psi_n) - \sigma(\psi_1, \psi_n) \\ (K\psi_2, \psi_1) - \sigma(\psi_2, \psi_1) & \ldots & (K\psi_2, \psi_n) - \sigma(\psi_2, \psi_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (K\psi_n, \psi_1) - \sigma(\psi_n, \psi_1) & \ldots & (K\psi_n, \psi_n) - \sigma(\psi_n, \psi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Les racines de l'équation (3) approchent les valeurs propres du noyau $K(x, t)$, la racine maximale approchant par défaut la plus grande valeur propre. Trouvons σ à partir de (3), portons-le dans (2) et cherchons la solution non nulle a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) du système (2). En substituant dans (1) les valeurs obtenues de a_k, nous obtenons une valeur approchée de la fonction propre correspondant à la valeur propre trouvée.

Exemple 1. Trouver moyennant la méthode de Ritz la valeur approchée du plus petit nombre caractéristique du noyau

$$K(x, t) = xt; \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Solution. Prenons pour système de fonctions $\psi_n(x)$ un système de polynômes de Legendre: $\psi_n(x) = P_n(2x - 1)$. Bornons-nous dans (1) à deux termes de sorte que

$$\varphi_2(x) = a_1 P_0(2x - 1) + a_2 \cdot P_1(2x - 1).$$

Notant que

$$\psi_1 \equiv P_0(2x - 1) = 1, \quad \psi_2 \equiv P_1(2x - 1) = 2x - 1,$$

nous obtenons

$$(\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 dx = 1, \quad (\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1) = \int_0^1 (2x - 1)\, dx = 0,$$

$$(\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 (2x - 1)^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

Ensuite

$$(K\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, t)\, \psi_1(t)\, dt \right) \psi_1(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^1 xt\, dx\, dt = \frac{1}{4},$$

$$(K\psi_1, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xt\,(2x - 1)\, dx\, dt = \frac{1}{12},$$

$$(K\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xt\,(2t - 1)\,(2x - 1)\, dx\, dt = \frac{1}{36}.$$

Le système (3) prend dans ce cas la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \sigma & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\sigma \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\sigma^2 - \sigma \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 0.$$

D'où $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \frac{1}{3}$. La plus grande valeur propre est $\sigma_2 = \frac{1}{3}$ et donc le plus petit nombre caractéristique $\lambda = \frac{1}{\sigma_2} = 3$.

Utiliser la méthode de Ritz et trouver les plus petits nombres caractéristiques des noyaux suivants ($a = 0$, $b = 1$):

340. $K(x, t) = x^2t^2$.

341. $K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t. \\ x, & x \leqslant t. \end{cases}$

342. $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x \geqslant t. \end{cases}$

2. Méthode des traces

Appelons m-ième *trace* du noyau $K(x, t)$ le nombre

$$A_m = \int_a^b K_m(t, t)\, dt,$$

où $K_m(x, t)$ est le m-ième itéré de $K(x, t)$.

Le plus petit nombre caractéristique λ_1 vérifie, pour m suffisamment grand, la formule approchée suivante:

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}. \tag{4}$$

La formule (4) donne $|\lambda_1|$ par excès.

Les traces d'ordre pair d'un noyau symétrique se calculent par la formule

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b K_m^2(x, t)\, dx\, dt = 2\int_a^b \int_a^x K_m^2(x, t)\, dt\, dx. \tag{5}$$

Exemple 2. Trouver par la technique des traces le premier nombre caractéristique du noyau

$$K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t, \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Solution. Vu la symétrie de $K(x, t)$, il suffit d'obtenir $K_2(x, t)$ pour $t < x$.

Nous avons

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, z)\, K(z, t)\, dz = \int_0^t z^2\, dz + \int_t^x zt\, dz + \int_x^1 xt\, dt =$$

$$= xt - \frac{x^2t}{2} - \frac{t^3}{6}.$$

Ensuite, moyennant la formule (5), nous trouvons respectivement pour $m = 1$ et $m = 2$

$$A_2 = 2\int_0^1 dx \int_0^x K_1^2(x, t)\,dt = 2\int_0^1 dx \int_0^x t^2\,dt = 2\int_0^1 \frac{x^3}{3}\,dx = \frac{1}{6},$$

$$A_4 = 2\int_0^1 dx \int_0^x K_2^2(x, t)\,dt$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^x \left(x^2t^2 + \frac{x^4t^2}{4} + \frac{t^6}{36} - x^3t^2 - \frac{xt^4}{3} + \frac{x^2t^4}{6}\right) dt =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{t^3x^2}{3} + \frac{t^3x^4}{12} + \frac{t^7}{7\cdot 36} - \frac{x^3t^3}{3} - \frac{xt^5}{15} + \frac{x^2t^5}{30}\right)\Big|_{t=0}^{t=x} dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{12} + \frac{x^7}{7\cdot 36} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^6}{15} + \frac{x^7}{30}\right) dx = \frac{17}{630}.$$

D'après la formule (4),

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{630}}} = 2{,}48.$$

Trouver par la méthode des traces le premier nombre caractéristique des noyaux suivants ($a = 0$, $b = 1$):

343. $K(x, t) = xt$.

344. $K(x, t) = x^2t^2$.

345. $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x \geqslant t. \end{cases}$

346. $K(x, t) = \begin{cases} -\sqrt{xt}\ln t, & x \leqslant t, \\ -\sqrt{xt}\ln x, & x \geqslant t. \end{cases}$

3. Méthode de Kellogg

Soit $K(x, t)$ un noyau symétrique que nous supposerons, pour fixer les idées, défini positif et soit $\omega(x)$ une fonction quelconque de $L_2(a, b)$. Construisons la suite

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(x) &= \int_a^b K(x, t)\,\omega(t)\,dt, \\ \omega_2(x) &= \int_a^b K(x, t)\,\omega_1(t)\,dt, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n(x) &= \int_a^b K(x, t)\,\omega_{n-1}(t)\,dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

et considérons la suite numérique

$$\left\{\frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}\right\}. \tag{6}$$

Admettons que $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... sont les fonctions propres orthonormées relatives au noyau $K(x, t)$ et $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ les nombres caractéristiques correspondants. Supposons de plus que la fonction $\omega(x)$ est orthogonale à $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{k-1}(x)$, mais ne l'est pas à la fonction propre $\varphi_k(x)$. La suite (6) a alors comme limite le k-ième nombre caractéristique, à savoir λ_k.

La suite fonctionnelle $\left\{\frac{\omega_n(x)}{\|\omega_n(x)\|}\right\}$ converge alors vers une fonction combinaison linéaire de fonctions propres associées à λ_k. La limite de la suite (6) est également celle de la suite

$$\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}\right\}.$$

Si $(\omega, \varphi_1) \neq 0$, on a deux formules approchées pour le plus petit nombre caractéristique :

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}, \tag{7}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}. \tag{8}$$

la formule (7) donnant une valeur approchée par excès. Dans le cas de $K(x, t)$ non défini positif, les formules (7), (8) fournissent une valeur approchée du plus petit module du nombre caractéristique

du noyau donné. A condition de bien choisir $\omega(x)$, la méthode de Kellogg est relativement peu laborieuse.

Le défaut de ce procédé est qu'on ne connaît pas à l'avance lequel des nombres caractéristiques est calculé.

Exemple 3. Calculer par la méthode de Kellogg le plus petit nombre caractéristique du noyau $K(x, t) = x^2t^2$, $0 \leqslant x, t \leqslant 1$.

Solution. Posons $\omega(x) = x$. On a alors

$$\omega_1(x) = \int_0^1 x^2t^2 t\, dt = \frac{x^2}{4},$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 x^2 \frac{t^4}{4}\, dt = \frac{1}{4} x^2 \cdot \frac{1}{5},$$

$$\omega_3(x) = \int_0^1 \frac{1}{4\cdot 5} x^2t^4\, dt = \frac{1}{4\cdot 5^2} x^2,$$

. . . . . .

$$\omega_n(x) = \frac{1}{4\cdot 5^{n-1}} x^2.$$

Ensuite

$$\| \omega_n(x) \| = \frac{1}{4} \frac{1}{5^{n-1}} \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{4\cdot 5^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Donc, conformément à (7),

$$\lambda_1 \approx \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}} = 5.$$

Dans les quatre exercices ci-dessous trouver par la méthode de Kellogg le plus petit nombre caractéristique des noyaux donnés:

347. $K(x, t) = xt$; $0 \leqslant x, t \leqslant 1$.

348. $K(x, t) = \sin x \sin t$; $-\pi \leqslant x, t \leqslant \pi$.

349. $K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t; \end{cases}$ $0 \leqslant x, t \leqslant 1$.

350. $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(2-t), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2} t(2-x), & x \geqslant t; \end{cases}$ $0 \leqslant x, t \leqslant 1$.

Stabilité de l'équilibre d'une barre comprimée (flambage d'une barre)

La fibre moyenne déformée d'une barre a pour équation

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{dy}{dx}\right)=M, \tag{9}$$

où M est le moment fléchissant, I le moment d'inertie de la section droite d'abscisse x et E le module de Young.

Considérons une barre comprimée par des forces appliquées à ses extrémités et notons P chacune de ces forces. On a alors $M = -P\cdot y$, et l'équation (9) se récrit

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{dy}{dx}\right)+P\cdot y=0. \tag{10}$$

Les extrémités ne s'écartent pas de l'axe longitudinal, donc

$$y(0)=y(l)=0, \tag{11}$$

où l est la longueur de la pièce. Divisons les deux membres de (10) par E et posons $\frac{P}{E}=\lambda$, il vient

$$\frac{d}{dx}\left(I\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0. \tag{12}$$

Soit $G(x, t)$ la fonction de Green de l'équation différentielle (12) avec les conditions aux limites (11). Le problème (12)-(11) équivaut alors à résoudre l'équation intégrale homogène de Fredholm de seconde espèce

$$y(x)=\lambda\int_0^l G(x, t)\,y(t)\,dt. \tag{13}$$

Le noyau $G(x, t)$ est symétrique en tant que fonction de Green d'un problème aux limites auto-adjoint. Ainsi, la flexion $y(x)$ de la barre comprimée satisfait à l'équation (13). Pour P quelconque, le nombre $\lambda=\frac{P}{E}$ n'est pas nombre caractéristique et l'équation (13) admet comme solution la fonction $y(x)\equiv 0$. En d'autres termes, si la force de compression est arbitraire, la barre reste rectiligne. Si $P=\lambda_n E$, avec λ_n un nombre caractéristique du noyau $G(x, t)$, l'équation (13) a une solution non nulle, ce qui signifie qu'il y a flambage, i.e. perte de stabilité.

La sollicitation P minimale pour laquelle la barre fléchit est dite critique. Elle vaut évidemment $P_c=\lambda_1 E$, λ_1 étant le plus petit nombre caractéristique de l'équation (13). Dans la pratique,

on utilise la formule approchée

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\int_0^l \int_0^l G^2(x,\ t)\, dx\, dt}}. \tag{14}$$

qui donne λ_1 par défaut ([20]) et qui est suffisamment bonne.

Exemple 4. Trouver la valeur critique de P dans le cas de la barre de la fig. 8 (un tronc de cône de bases de rayon r_0 et $r_1 = r_0(1+q)$, $q > 0$).

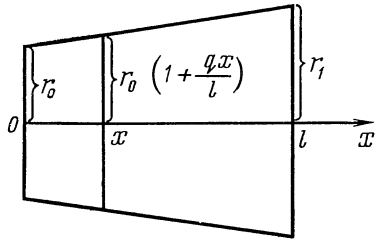

Fig. 8

Solution. Le rayon de la section d'abscisse x est

$$r(x) = r_0\left(1+\frac{qx}{l}\right)$$

et le moment d'inertie de cette section

$$I = \frac{\gamma r_0^4}{2}(1+\alpha x)^4,$$

où γ est la densité de la barre et $\alpha = \frac{q}{l}$. L'équation (12) s'écrit

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\alpha x)^4 \frac{dy}{dx}\right] + \mu y = 0, \qquad \mu = \frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}. \tag{14}$$

Trouvons le plus petit nombre caractéristique de l'équation intégrale

$$y(x) - \mu \int_0^l G(x,\ t)\, y(t)\, dt = 0, \tag{16}$$

où $G(x,\ t)$, fonction de Green du problème (15), (11), a la forme

$$G(x,\ ) = \begin{cases} \frac{1}{c}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha x)^3}\right]\left[\frac{1}{(1+\alpha t)^3}-\frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \frac{1}{c}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha t)^3}\right]\left[\frac{1}{(1+\alpha x)^3}-\frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], & t \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

avec

$$c = 3\alpha \left[\frac{1}{(1+\alpha l)^3} - 1 \right].$$

Conformément à la formule (14), le plus petit nombre caractéristique μ_1 de (16) vaut approximativement

$$\mu_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\int_0^l \int_0^l G^2(x, t)\, dx\, dt}} = \frac{1}{\sqrt{2 \int_0^l dx \int_0^x G^2(x, t)\, dt}}. \tag{17}$$

La recherche de μ_1 d'après la formule (17) est extrêmement laborieuse. On simplifie le calcul en supposant q petit et en négligeant les termes contenant les puissances de q supérieures à la première. Nous obtenons

$$\mu_1 \approx \frac{3\sqrt{10}}{l^2\sqrt{1-4q}}.$$

D'où la valeur critique de P:

$$P_c \approx E \cdot \frac{\gamma r_0^4}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{l^2\sqrt{1-4q}} \approx \frac{E\gamma r_0^4 \cdot 4{,}743}{l^2}(1+2q). \tag{18}$$

Pour une barre de section constante $q = 0$ et la formule (18) donne

$$P_c \approx 4{,}743 \frac{E\gamma r_0^4}{l^2}.$$

La valeur critique exacte est

$$\frac{\pi^2 E\gamma r_0^2}{2l^2} = 4{,}948 \frac{E\gamma r_0^4}{l^2}.$$

RÉPONSES

9. $\varphi(x) = -x + \int_0^x (t-x)\,\varphi(t)\,dt.$

10. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\,dt.$

11. $\varphi(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

12. $\varphi(x) = 5 - 6x + \int_0^x [5 - 6(x-t)]\,\varphi(t)\,dt.$

13. $\varphi(x) = \cos x - x - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

14. $\varphi(x) = x - \sin x + e^x(x-1) + \int_0^x [\sin x - e^x(x-t)]\,\varphi(t)\,dt.$

15. $\varphi(x) = \cos x - 2x(1+x^2) - \int_0^x (1+x^2)(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

16. $\varphi(x) = xe^x + 1 - x(x^2-1) - \int_0^x \left[x + \frac{1}{2}(x^2-x)(x-t)^2\right]\varphi(t)\,dt.$

17. $\varphi(x) = x(x+1)^2 + \int_0^x x(x-t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

19. $\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2}.$ **20.** $\varphi(x) = (1-x)\,e^{-2x}.$

21. $\varphi(x) = 1 - x.$ **22.** $\varphi(x) = \frac{4x+1}{2x+1}.$

23. $\varphi(x) = (1+x)\,e^x.$

24. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\,(x-t) \quad (\lambda > 0)$. **25.** $e^{(1+\lambda)(x-t)}$.

26. $e^{\lambda(x-t)} e^{x^2-t^2}$. **27.** $\frac{1+x^2}{1+t^2} e^{\lambda(x-t)}$.

28. $\frac{2+\cos x}{2+\cos t} e^{\lambda(x-t)}$. **29.** $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t} e^{\lambda(x-t)}$.

30. $a^{x-t} e^{\lambda(x-t)}$. **31.** $e^{x-t}\,(x-t+2)$.

32. $\frac{1}{4} e^{x-t} - \frac{9}{4} e^{-3(x-t)}$. **33.** $2x e^{x^2-t^2}$.

34. $\frac{4t^2+1}{2\,(2t+1)^2}\left[\frac{8}{4t^2+1} - 4e^{-2(x-t)}\right]$; l'une des solutions de l'équation différentielle correspondante est $y_1(x) = e^{-2x}$.

36. $\varphi(x) = e^{2x}$. **37.** $\varphi(x) = \frac{1}{5} e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x$.

38. $\varphi(x) = 3^x\,(1 - e^{-x})$.

39. $\varphi(x) = e^x \sin x + (2+\cos x)\, e^x \ln \frac{3}{2+\cos x}$.

40. $\varphi(x) = e^{x^2-x} - 2x$.

41. $\varphi(x) = e^{x^2+2x}\,(1+2x)$. **42.** $\varphi(x) = e^x\,(1+x^2)$.

52. $I = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$.

54. $\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}$.

55. $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x-t}}\, dt$.

56. $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left(x^{-\frac{1}{2}} + e^x \int_0^x e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt\right)$. **57.** $\varphi(x) = \frac{1}{2}$.

58. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$, où $g(x, y) =$

$$= \iint_{D_1} \frac{f(u, v)\, du\, dv}{\sqrt{(y-v)^2 - (x-u)^2}},$$

D_1 étant un triangle rectangle isocèle de sommet en (x, y) dont l'hypoténuse se confond avec l'axe Ou du plan uOv.

59. $\varphi(x) = \frac{4}{3} - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} x^{\frac{2}{3}}$. **60.** $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

61. $\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)x^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} x^{\frac{3}{4}}\right]$.

62. $\varphi(x) = 3$.

63. $\varphi(x) = \sin x$. **64.** Oui. **65.** Oui. **66.** Oui. **67.** Oui. **68.** Non. **69.** Non. **70.** Oui. **71.** Oui. **72.** Oui.

77. $R(x, t; \lambda) = \frac{2x - t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}$.

78. $R(x, t; \lambda) = \frac{x^2 t - xt^2 + xt\left(\frac{x+t}{4} - \frac{xt}{3} - \frac{1}{5}\right)\lambda}{1 + \frac{\lambda^2}{240}}$.

79. $R(x, t; \lambda) = \sin x \cos t$.

80. $R(x, t; \lambda) = \frac{\sin x - \sin t - \pi(1 + 2\sin x \sin t)\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2}$.

81. $R(x, t; \lambda) = \frac{x + t + 1 + 2\left(xt + \frac{1}{3}\right)\lambda}{1 - 2\lambda - \frac{4}{3}\lambda^2}$.

82. $R(x, t; \lambda) = \frac{1 + 3xt + \left(3\frac{x+t}{2} - 3xt - 1\right)\lambda}{1 - 2\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2}$.

83. $R(x, t; \lambda) = \frac{4xt - x^2 - \left(2x^2 t - \frac{4}{3}x^2 + x - \frac{4}{3}xt\right)\lambda}{1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{18}}$.

84. $R(x, t; \lambda) = \frac{e^{x-t}}{1-\lambda}$.

85. $R(x, t; \lambda) = \frac{\sin(x+t) + \pi\lambda\cos(x-t)}{1 - \pi^2\lambda^2}$.

86. $R(x,\ t;\ \lambda)=\dfrac{x-\operatorname{sh} t-2\,(e^{-1}+x\operatorname{sh} t)\,\lambda}{1+4e^{-1}\lambda^2}$.

87. $\varphi(x)=1$. **88.** $\varphi(x)=\dfrac{1}{6}\left[x+\dfrac{(6x-2)\,\lambda-\lambda^2 x}{\lambda^2-3\lambda+6}\right]$.

89. $\varphi(x)=\cos 2x$. **90.** $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\,e^x$.

91. $\varphi(x)=\dfrac{3x\,(2\lambda-3\lambda x+6)}{\lambda^2-18\lambda+18}$.

92. $K_{2n-1}(x,\ t)=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}(x-t)$, $K_{2n}(x,\ t)=$

$=2\,(-1)^n\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}\left(xt+\dfrac{1}{3}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

93. $K_2(x,\ t)=\dfrac{\sin(x+t)}{2}-\dfrac{\pi}{4}\cos(x-t)$,

$K_3(x,\ t)=\dfrac{4-\pi^2}{16}\sin(x-t)$.

94. $K_2(x,\ t)=\dfrac{2}{3}\,(x+t)^2+2x^2t^2+\dfrac{32}{9}\,xt+\dfrac{2}{5}$,

$K_3(x,\ t)=\dfrac{56}{45}\,(x^2+t^2)+\dfrac{8}{3}\,x^2t^2-4xt+\dfrac{8}{15}$.

95. $K_{2n-1}(x,\ t)=(2\pi)^{2n-2}\,(x+\sin t)$,

$K_{2n}(x,\ t)=(2\pi)^{2n-1}\,(1+x\sin t)\quad(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

96. $K_n(x,\ t)=xe^t$. **97.** $K_n(x,\ t)=\left(-\dfrac{e^{\pi}+1}{2}\right)^{n-1}e^x\cos t$.

98. $K_2(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{e^{x+t}+e^{2-x-t}}{2}+(t-x-1)\,e^{t-x}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \dfrac{e^{x+t}+e^{2-x-t}}{2}+(x-t-1)\,e^{x-t}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

99. $K_2(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{e^2+1}{2}\,e^{t-x}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{e^2+1}{2}\,e^{t+x}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

100. $R(x,\ t;\ \lambda)=\dfrac{2e^{x+t}}{2-(e^2-1)\,\lambda}$; $|\lambda|<\dfrac{2}{e^2-1}$.

101. $R(x,\ t;\ \lambda)=\dfrac{2\sin x\cos t}{2-\lambda}$; $|\lambda|<2$.

102. $R(x,\ t;\ \lambda)=\dfrac{xe^{t+1}}{e-2\lambda}$; $|\lambda|<\dfrac{e}{2}$.

103. $R(x, t; \lambda) = \frac{3(1+x)(1-t)}{3-2\lambda}$; $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

104. $R(x, t; \lambda) = \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda}$; $|\lambda| < \frac{5}{2}$.

105. $R(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda}$; $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

106. $R(x, t; \lambda) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$.

107. $R(x, t; \lambda) = \frac{1}{1-\lambda} + \frac{3(2x-1)(2t-1)}{3-\lambda}$; $|\lambda| < 1$.

111. $\varphi(x) = \frac{\pi^2}{\pi-1} \sin^2 x + 2x - \pi$. **112.** $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$.

113. $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\lambda + \operatorname{cotg} x$. **114.** $\varphi(x) = \frac{1+q^2}{1+q^2-\lambda}$.

115. $\varphi(x) = \frac{-\pi^2\lambda}{8(\lambda-1)} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lambda \neq 1$.

116. $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda\Gamma(p+1)}$.

117. $\varphi(x) = \frac{2\lambda^2 x + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \lambda\right) \ln x}{1 + \frac{29}{48}\lambda^2} + \frac{6}{5}(1-4x)$

118. $\varphi(x) = \frac{2}{2-\lambda} \sin x$; $\lambda \neq 2$.

119. $\varphi(x) = \lambda\pi^3 \sin x + x$. **120.** $\varphi(x) = 2\frac{2\cos x + \pi\lambda \sin x}{4+\pi^2\lambda^2}$.

121. $\varphi(x) = \lambda\pi \sin x + \cos x$. **122.** $\varphi(x) = \frac{15}{32}(x+1)^2 + \frac{5}{16}$.

123. $\lambda_1 = \frac{8}{\pi-2}$, $\varphi_1(x) = \sin^2 x$. **124.** Il n'y en a pas.

125. $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, $\varphi_1(x) = \sin x$. **126.** $\lambda_1 = -\frac{2}{\pi}$, $\lambda_2 = \frac{2}{\pi}$, $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$.

127. L'équation n'a pas de nombres caractéristiques réels et de fonctions propres.

128. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\varphi(x) = x - 2x^2$.

129. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\varphi_1(x) = \frac{5}{2}x + \frac{10}{3}x^2$.

130. $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\varphi_1(x) = \frac{3}{2}x + x^2$.

131. $\lambda_1 = -\frac{e}{2}$, $\varphi_1(x) = \operatorname{sh} x$. **132.** Il n'y en a pas.

133. L'équation est dépourvue de nombres caractéristiques réels et de fonctions propres.

134. $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\varphi_1(x) = Cx$,

$$\lambda_2 = \frac{27+3\sqrt{61}}{8}, \quad \varphi_2(x) = \left(x^2 + \frac{6-\sqrt{61}}{5}\right) C,$$

$$\lambda_3 = \frac{27-3\sqrt{61}}{8}, \quad \varphi_3(x) = \left(x^2 + \frac{6+\sqrt{61}}{5}\right) C.$$

135. $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $\varphi_n(x) = \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

136. $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0(x) = e^x$, $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $\varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

137. $\lambda_n = -\frac{1}{3}\mu_n^2$, $\varphi_n(x) = \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x$, où μ_n sont racines de l'équation $\mu - \frac{1}{\mu} = 2 \operatorname{cotg} \mu$.

138. $\lambda_n = 4n^2 - 1$, $\varphi_n(x) = \sin 2nx \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

139. $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$, $\varphi_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x$.

140. $\lambda_n = \frac{1-\mu_n^2}{\sin 1}$, $\varphi_n(x) = \sin \mu_n (\pi + x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$, où μ_n sont racines de l'équation $\operatorname{tg} 2\pi\mu = -\mu \operatorname{tg} 1$.

141. $\lambda_n = 1 - \mu_n^2$, $\varphi_n(x) = \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x$, où μ_n sont racines de l'équation $2 \operatorname{cotg} \pi\mu = \mu - \frac{1}{\mu}$.

142. $\lambda_n = \frac{1+\mu_n^2}{2}$, $\varphi_n(x) = \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x$, où μ_n sont racines de l'équation $2 \operatorname{cotg} \mu = \mu - \frac{1}{\mu}$.

143. $\lambda_n = -1 - \mu_n^2$, $\varphi_n(x) = \sin \mu_n x$, où μ_n sont racines de l'équation $-\operatorname{tg} \mu = \mu \quad (\mu > 0)$.

150. $\frac{\pi^4}{90}$. **151.** $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$. **152.** $\frac{1+e^{-2}}{8}$.

153. $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = 2x - 1$. **154.** $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$.

155. $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = 3x^2 - 1$.

156. $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$, $\varphi_0(x) = 1$, $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$, $\varphi_1^{(1)}(x) = \cos 2x$, $\varphi_1^{(2)}(x) = \sin 2x$.

158. $\lambda_0 = \frac{3}{2\pi^3}$, $\varphi_0(x) = 1$, $\lambda_n = (-1)^n \frac{n^2}{4\pi}$,

$\varphi_n^{(1)}(x) = \cos nx$, $\varphi_n^{(2)}(x) = \sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

159. a) $\frac{1}{3}$, $\varphi(x) = \pm\sqrt{3x}$; b) $\frac{2}{3}$, $\varphi(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}x}$;

c) 1, $\varphi(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{e^2-1}}\, e^x$.

160. $\varphi(x) = \begin{cases} C\cdot\sin x, & \lambda = -\frac{2}{\pi}, \\ C\cdot\cos x, & \lambda = \frac{2}{\pi}, \\ 0, & \lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}. \end{cases}$

161. $\varphi(x) = \begin{cases} C\cdot\arccos x, & \lambda = 1, \\ 0, & \lambda \neq 1. \end{cases}$ 162. $\varphi(x) = C$.

163. $\varphi(x) = C|x|$. 164. $\varphi(x) = C(x - x^2)$.

165. $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$.

166. $\varphi(x) = 2e^x - 2 + (2-e)x$.

167. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\mu x - \mu\cos\mu x + \sin\mu(x-1)}{2\mu\cos\frac{\mu}{2}\left(\cos\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2}\sin\frac{\mu}{2}\right)}, & \lambda > 0, \quad \mu = \sqrt{2\lambda}, \\ \dfrac{\operatorname{sh}\mu x - \mu\operatorname{ch}\mu x + \operatorname{sh}\mu(x-1)}{2\mu\operatorname{ch}\frac{\mu}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2}\operatorname{sh}\frac{\mu}{2}\right)}, & \lambda < 0, \quad \mu = \sqrt{-2\lambda}. \end{cases}$

168. $\varphi(x) = 3\cos 2x + \dfrac{2\sin\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\sqrt{3}\pi}{4}}$.

169. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\cos\sqrt{\lambda+1}\,(\pi-x) + \cos\sqrt{\lambda+1}\,\pi}{(\lambda+1)\cos\pi\sqrt{\lambda+1}}, & \lambda > -1, \\ \dfrac{\lambda\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda-1}\,(\pi-x) + \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda-1}\,\pi}{(\lambda+1)\operatorname{ch}\pi\sqrt{-\lambda-1}}, & \lambda < -1, \\ \frac{x^2}{2} - \pi x + 1, & \lambda = -1. \end{cases}$

170. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{3(\operatorname{sh}\mu x + \mu \operatorname{ch}\mu x) + \operatorname{sh}\mu(x-1) - 2\mu \operatorname{ch}\mu(x-1)}{(1+2\mu^2)\operatorname{sh}\mu + 3\mu \operatorname{ch}\mu}, \\ \lambda > 0, \quad \mu = 2\sqrt{\lambda}, \\ \dfrac{3(\sin\mu x + \mu\cos\mu x) + \sin\mu(x-1) - 2\mu\cos\mu(x-1)}{(1-2\mu^2)\sin\mu + 3\mu\cos\mu}, \\ \lambda < 0, \quad \mu = 2\sqrt{-\lambda}. \end{cases}$

171. $\varphi(x) = -1$. **172.** $\varphi(x) = \dfrac{e \operatorname{sh}\sqrt{2}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{2} + \sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}}$.

173. $\varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh} 1 \cos\mu x}{\mu \sin\mu}, & \lambda > 1, \quad \mu = \sqrt{\lambda - 1}, \\ \dfrac{\operatorname{sh} 1 \operatorname{ch}\mu x}{\mu \operatorname{sh}\mu}, & \lambda < 1, \quad \mu = \sqrt{1-\lambda}; \end{cases}$

pas de solution si $\lambda = 1$.

174. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch}\dfrac{\mu\pi}{2} - \dfrac{\mu\pi}{2}\operatorname{sh}\dfrac{\mu\pi}{2}}, & \lambda \geqslant 0, \quad \mu = \sqrt{2\lambda}, \\ \dfrac{\cos\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\dfrac{\mu\pi}{2} + \dfrac{\mu\pi}{2}\sin\dfrac{\mu\pi}{2}}, & \lambda < 0, \quad \mu = \sqrt{-2\lambda}. \end{cases}$

175. $\varphi(x) = 1 + \dfrac{2\lambda\pi}{2 - \lambda\pi}\cos^2 x$; $\lambda \neq \dfrac{2}{\pi}$. Pour $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, il n'y a pas de solution.

176. $\varphi(x) = \dfrac{e}{e - 2\lambda}x$; $\lambda \neq \dfrac{e}{2}$. Impossibilité pour $\lambda = \dfrac{e}{2}$.

177. $\varphi(x) = x + \dfrac{2\pi^2\lambda}{1 - \pi^2\lambda}|x - \pi|$; $\lambda \neq \dfrac{1}{\pi^2}$. Si $\lambda = \dfrac{1}{\pi^2}$, l'équation ne possède pas de solution.

178. $\varphi(x) = \dfrac{3x(2\lambda^2 x - 2\lambda^2 - 5\lambda - 6) + (\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2}$, $\lambda \neq -3$. Absence de solutions quand $\lambda = -3$.

179. $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 - \dfrac{3}{5}\dfrac{4\lambda+5}{4\lambda+3}x & \text{si} \quad \lambda \neq \dfrac{3}{2}, \ \lambda \neq -\dfrac{3}{4}, \\ x^3 - \dfrac{11}{15}x + Cx^2 & \text{si} \quad \lambda = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Pour $\lambda = -\dfrac{3}{4}$, il n'y a pas de solution.

180. $\varphi(x) = \begin{cases} \sin x \text{ si } \lambda \neq 1, \\ C_1 \cos x + C_2 \sin 2x + \sin x \text{ si } \lambda = 1. \end{cases}$

181. $\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \operatorname{th} 1$ si $\lambda = -1$;

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left[\frac{(\mu^2-1)\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\mu - \mu \operatorname{sh}\mu \operatorname{th} 1} + 1\right]\frac{1}{\mu^2}, & \lambda > -1, \ \mu = \sqrt{\lambda+1}, \\ \left[\frac{(\mu^2+1)\cos\mu x}{\cos\mu + \mu \sin\mu \operatorname{th} 1} - 1\right]\frac{1}{\mu^2}, & \lambda < -1, \ \mu = \sqrt{-\lambda-1}. \end{cases}$$

182. Pour $\lambda \neq \frac{3}{2}$, les paramètres α, β, γ peuvent être quelconques ; pour $\lambda = \frac{3}{2}$, l'équation est résoluble avec $\beta = 0$ et α et γ quelconques.

183. Pour $\lambda \neq -6 \pm 4\sqrt{3}$, les paramètres α et β peuvent être quelconques ; si $\lambda = -6+4\sqrt{3}$, il y a existence d'une solution dans la condition $(e+\sqrt{3}-1)\alpha + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\beta = 0$; pour $\lambda = -6-4\sqrt{3}$, la condition de résolubilité est $(e-\sqrt{3}-1)\alpha + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\beta = 0$.

184. Pour $\lambda \neq \frac{24}{\pi^3}$, les paramètres α et β peuvent être quelconques ; pour $\lambda = \frac{24}{\pi^3}$, une solution existe si $\pi^3\mu + 24\beta = 0$.

190. $G(x, \xi) = \begin{cases} \xi - 1 + (\xi - 2)x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (\xi - 1)x - 1, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

191. Dans les conditions $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$, l'équation $y''(x) = 0$ admet évidemment une infinité de solutions $y(x) = C$. Ce problème aux limites n'a donc pas de fonction de Green.

192. Non.

193. $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{6}(3\xi - x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{\xi^2}{6}(3x - \xi), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

194. $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(\xi-1)}{2}(x - x\xi + 2\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{\xi}{2}[x(2-x)(\xi-2) + \xi], & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

195. $G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(x-\xi)(\xi-1)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\dfrac{\xi(\xi-x)(x-1)}{2}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

196. Non. **197.** Non.

198. $G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} k(\xi-1) \operatorname{sh} kx}{k \operatorname{sh} k}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\operatorname{sh} k\xi \operatorname{sh} k(x-1)}{k \operatorname{sh} k}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

199. $G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(x-\xi+\frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\cos\left(\xi-x+\frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

200. Non.

201. $G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{(hx+1)[H(\xi-1)-1]}{h+H+hH}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{(h\xi+1)[H(x-1)-1]}{h+H+hH}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

202. $G(x, \xi) = \begin{cases} \alpha+1-\dfrac{1}{\xi}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \alpha+1-\dfrac{1}{x}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

203. $G(x, \xi) = \begin{cases} \xi - \ln \xi - 1 - \dfrac{x(\xi-1)^2}{2\xi}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ x - \ln x - 1 - \dfrac{\xi(x-1)^2}{2x}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

204. $G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}\left(1-\dfrac{1}{\xi^2}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

205. $G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}\left(\xi-\dfrac{1}{\xi}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

206. $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2n\xi}\left[(x\xi)^n - \left(\frac{x}{\xi}\right)^n\right], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{1}{2n\xi}\left[(x\xi)^n - \left(\frac{\xi}{x}\right)^n\right], & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

207. $G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{x \ln \xi}{\xi^2 (\ln \xi - 1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\frac{\ln x}{\xi (\ln \xi - 1)^2}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

208. $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

209. $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \frac{\xi}{l}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \ln \frac{x}{l}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

210. $G(x, \xi) = \begin{cases} \left[\frac{1-\lambda}{2(1+\lambda)} e^{\xi - 2l} - \frac{1}{2} e^{-\xi}\right] e^x, 0 \leqslant x \leqslant \xi (|\lambda| \neq 1), \\ \frac{1-\lambda}{2(1+\lambda)} e^{\xi - 2l + x} - \frac{1}{2} e^{\xi - x}, \quad \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

Pour $\lambda = 1$, $G(x, \xi) = -\frac{1}{2} e^{-|x-\xi|}$ ne dépend pas de l. Si $\lambda = -1$, la fonction de Green n'existe pas.

211. $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{c}\left[1 - \frac{1}{(1+\alpha x)^3}\right]\left[\frac{1}{(1+\alpha\xi)^3} - \frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], \\ 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{1}{c}\left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\xi)^3}\right]\left[\frac{1}{(1+\alpha x)^3} - \frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right], \\ \xi \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$

où $c = 3\alpha\left[\frac{1}{(1+\alpha l)^3} - 1\right]$.

212. $y = x - \frac{\pi}{2} \sin x$. **213.** $y = \frac{x^2}{24}(x^2 - 4x + 6)$.

214. $y = \frac{1}{4}[(1 - e^2) \ln x + x^2 - 1]$. **215.** $y = \frac{1}{4\pi}(2x - 1) \sin \pi x$.

216. $y = 2[\operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(x-1) - \operatorname{sh} 1]$.

217. $y = \operatorname{sh} x + (l - x) e^x$.

218. $y = 2 \cos x + \left(2 - \frac{\pi^2}{4}\right) \sin x + x^2 - 2$.

219. $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi/2} G(x,\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{x^4}{12}-\frac{\pi^3}{96}x,$

où $G(x,\,\xi)=\begin{cases}\left(\frac{2\xi}{\pi}-1\right)x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \xi\left(\frac{2x}{\pi}-1\right), & \xi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

220. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 G(x,\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+e^x-ex+x-1,$

où $G(x,\,\xi)=\begin{cases}(\xi-1)\,x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (x-1)\,\xi, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

221. $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^1 G(x,\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{x}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2},$

où $G(x,\,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\xi-x), & -1\leqslant x\leqslant\xi,\\ \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

222. $y(x)=-\lambda\int\limits_0^1 G(x,\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-17x-5),$

où $G(x,\,\xi)=\begin{cases}(\xi-2)\,x+\xi-1, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (\xi-1)\,x-1, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

223. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 G(x,\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{x^2}{24}(x^2-4x+6),$

où $G(x,\,\xi)=\begin{cases}\frac{x^2}{6}(3\xi-x), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \frac{\xi^2}{6}(3x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

224. $y(x)=-\lambda\int\limits_0^1 G(x,\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{1}{12}x(x-1)(x^2+x-1),$

où $G(x,\,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}x(x-\xi)(\xi-1), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ -\frac{1}{2}\xi(\xi-x)(x-1), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

225. $y(x) = e^x - \lambda \int_0^1 G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi,$

où $G(x, \xi) = \begin{cases} (1+x)\,\xi, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (1+\xi)\,x, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

227. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}\,(1+\sqrt{1-2\lambda})}{2\sqrt{1-2\lambda}}, & x > 0, \\ \dfrac{e^{x\sqrt{1-2\lambda}}\,(1-\sqrt{1-2\lambda})}{2\sqrt{1-2\lambda}}, & x < 0. \end{cases}$

228. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ \dfrac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}, & x < 0. \end{cases}$

229. $\varphi(x) = -\dfrac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{F(\omega)\, e^{ix\omega}}{1 + e^{-\frac{\omega^2}{4}}}\, d\omega$, où $F(\omega)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$.

230. $\varphi(x) = e^{-x}$.

231. $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi t}{1-t^2}, & t \neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & t = 1. \end{cases}$

232. $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{2t \sin \pi t}{\pi(1-t^2)}, & t \neq 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$

233. $\varphi(t) = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{t^2+2}{t^4+4}$. **234.** $\varphi(x) = 1$.

235. $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$. **236.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(3e^{2x} - 1)$.

237. $\varphi(x) = \sin x$. **238.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{3}(2 \cos \sqrt{3}\, x + 1)$.

239. $\varphi(x) = 2x + 1$. **240.** $\varphi(x) = x + \dfrac{x^3}{6}$.

241. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} \sin x + \dfrac{1}{2} \operatorname{sh} x$. **242.** $\varphi(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$.

243. $\varphi(x) = e^x$. **244.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{sh} \dfrac{\sqrt{5}}{2}\, x e^{-\frac{x}{2}}$.

245. $\varphi(x) = 1 + 2xe^x$. **246.** $\varphi(x) = e^x(1+x)^2$.

247. $\varphi(x) = \frac{1}{2}(e^x + \sin x + \cos x)$.

248. $\varphi(x) = I_1(x)$.

249. $\varphi(x) = -I_1(x)$.

(Ici $I_1(x)$ est une fonction de Bessel modifiée de première espèce.)

250. $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = 0$.

251. $\varphi_1(x) = 3e^x - 2$, $\varphi_2(x) = 3e^x - 2e^{2x}$.

252. $\varphi_1(x) = e^{2x}$, $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{2x})$.

253. $\begin{cases} \varphi_1(x) = (x+2)\sin x + (2x+1)\cos x, \\ \varphi_2(x) = \frac{2+x}{2}\cos x - \frac{2x+1}{2}\sin x. \end{cases}$

254. $\varphi_1(x) = 2\sin x$, $\varphi_2(x) = 2\cos x - 1$, $\varphi_3(x) = x$.

255. $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$, $\varphi_3(x) = \sin x + \cos x$.

256. $\begin{cases} \varphi_1(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\cos x + \frac{1}{2}\sin x, \\ \varphi_2(x) = 1 - x + \frac{1}{2}\sin x - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\cos x, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\sin x. \end{cases}$

257. $\varphi(x) = e^x - 1$. **258.** $\varphi(x) = -e^x$.

259. $\varphi(x) = \frac{1}{2}x\sin x$. **260.** $\varphi(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$.

261. $\varphi(x) = 1 - \cos x$. **262.** $\varphi(x) = 1 - x + 2(\sin x - \cos x)$.

263. $\varphi(x) = e^{-x} - xe^{-x}$. **264.** $\varphi(x) = c + 2e^{-x}$.

265. $\varphi(x) = \cos x - \sin x$. **266.** $\varphi(x) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} - \frac{e^{(\alpha-1)x}}{\alpha - 1}$.

267. $\varphi(x) = \cos x$. **268.** $\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - \cos x)$.

269. $\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \operatorname{ch} 2x$.

270. $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}[e^x - \lambda(e^x - 1)]$.

271. $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}(\cos x + \lambda \sin x)$.

272. $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}[\cos x + \lambda(x - \sin x)]$.

273. $\varphi(x) = \frac{\sin x}{1-\lambda}$. **274.** $\varphi(x) = \frac{2}{1+x^2} + \sqrt{\pi}\, e^{-x}$.

275. $\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin xt\, dt \quad (|\lambda| \neq 1)$.

276. $\varphi(x) = e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+x^2}$.

277. $\varphi(x) = \cos x - \sin x$. **278.** $\varphi(x) = 1 - x \ln 3$.

279. $\varphi(x) = f'(x) - f(x)\ln a$. **280.** $\varphi(x) = xe^{x^2}$.

281. $\varphi(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. **282.** $\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}(x^2+2) - 1$.

284. $\varphi(x) = 1$.

285. $\varphi(x) = e^{-x}$.

286. $\varphi(x) = \frac{15}{4}x$. **287.** $\varphi(x) = \cos x - 2\sin x$.

288. $\varphi(x) = 2x - x^2$. **289.** $\varphi(x) = 2\sin x$.

290. $\varphi(x) = 3!\,(xe^{-x} - x^2e^{-x})$. **291.** $\varphi(x) = J_0(x)$.

292. $\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. **293.** $\varphi(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

294. On a $x^2 - t^2 = x^2 - 2xt + t^2 + 2xt - 2t^2 = (x-t)^2 + 2t(x-t)$. Donc

$$\frac{x^3}{3} = \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\, dt + 2\int_0^x t(x-t)\varphi(t)\, dt.$$

Passons aux images et appliquons le théorème du produit et le théorème sur la dérivée de l'image aux termes duquel $t\varphi(t) \doteqdot -\Phi'(p)$, il vient

$$\frac{2}{p^4} = \frac{2}{p^3}\Phi(p) - \frac{2}{p^2}\Phi'(p).$$

ou

$$\Phi'(p) = \frac{1}{p}\Phi(p) - \frac{1}{p^2}.$$

Résolvons cette équation différentielle. On a

$$\Phi(p) = C \cdot p + \frac{1}{2p}.$$

Vu que $\Phi(p)$ est une image, $\Phi(p)$ doit tendre vers zéro pour $p \to \infty$ de sorte que $C=0$ et $\Phi(p)=\frac{1}{2p}$, d'où $\varphi(x)=\frac{1}{2}$.

295. $\varphi(x)=C-x$. **296.** $\varphi(x)=C+J_0(2\sqrt{x})$.

297. $\varphi(x)=C+x$. **298.** $\varphi(x)=2+\delta(x)-\delta'(x)$.

299. $\varphi(x)=\delta(x)-\sin x$. **300.** $\varphi(x)=\delta(x)+3$.

301. $\varphi(x)=1+x+\delta(x)+\delta'(x)$. **302.** $\varphi(x)=1$.

303. Non. **304.** Oui. **305.** Oui.

306. $\varphi(t)=\frac{35t^3-27t}{2}$ $(0<x<1)$.

307. $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}P_n(t)$ $(0<x<1)$.

308. $\varphi(t)=1+2t-\frac{t^2}{2}$ $(|x|<1)$.

309. $\varphi(x)=1+\frac{\pi x}{2}$.

310. $\varphi(x)=6\left(x^2+\frac{\pi x^3}{4}\right)$.

311. $\varphi(x)=3(1+2x^2)$.

312. $\tilde{\varphi}(x)=e^x-x-0{,}5010x^2-0{,}1671x^3-0{,}0422x^4$; $|\varphi-\tilde{\varphi}|<0{,}008$; la solution exacte est $\varphi(x)\equiv 1$.

313. $\tilde{\varphi}(x)=\cos x+\frac{x}{89}[78-78\sin 1-24\cos 1+x(84\sin 1+108\cos 1-84]$; $|\varphi-\tilde{\varphi}|<0{,}040$; la solution exacte est $\varphi(x)\equiv 1$.

314. $\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{2}(3x-1+e^{-x})-0{,}252x^2+0{,}084x^3$; $|\varphi-\tilde{\varphi}|<0{,}016$; la solution exacte est $\varphi(x)=x$.

315. $\tilde{\varphi}(x)=\frac{x+\sin x}{2}+\left(\frac{58}{9}-\frac{16}{3}\sin 1-\frac{52}{15}\cos 1\right)x^3$; $|\varphi-\tilde{\varphi}|<0{,}005$; la solution exacte est $\varphi(x)=x$.

316. La solution exacte est $\varphi(x)\equiv 1$. **317.** La solution exacte est $\varphi(x)\equiv 1$.

318. La solution exacte est $\varphi(x)=\pi x$.

319. $\varphi(x)=\sin x$. **320.** $\varphi(x)=\cos x$. **321.** $\varphi(x)=\operatorname{ch} x$.

322. $\varphi(x)=1$. **323.** $\varphi(x)=x$. **324.** $\varphi(x)=e^x$.

325. $\varphi(x)=2$.

326. $\varphi(x)=2$. **327.** $\varphi(x)=x^2-2x$. **328.** $\varphi(x)\equiv 0$.

330. $\varphi_2(x)=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{18}x^6+\frac{1}{63}x^7$.

331. $\varphi_3(x) = -x + \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{14} + \frac{x^{10}}{160}$

332. $\varphi(x) = x + 5x^2, \quad \varphi_0(x) = x.$

333. $\varphi(x) = x, \quad \varphi_0(x) = 0.$

334. $\varphi_3(x) = 1 + \frac{22}{15}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}x^6;$

$\varphi_0(x) = 1$; la solution exacte est $\varphi(x) = \cos x + \operatorname{tg} 1 \sin x.$

335. Le noyau de l'équation possède les nombres caractéristiques $\lambda_n = n^2$ et les fonctions propres (orthonormées) $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ si bien que le noyau $K(x, t)$ admet le développement

$$K(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nt}{n^2}.$$

Dans ce cas $\lambda_1 = 1$. Prenons $\varphi_0(x) = \frac{\sin 2x}{2}$ et $\lambda = 1$ et appliquons la formule des itérations

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \lambda \left[f(x) - \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t)\, dt \right].$$

On a

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nt}{n^2} \frac{1}{2} \sin 2t\, dt \right] =$$

$$= \frac{7}{8} \sin 2x = \frac{3}{4} \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$\varphi_2 = \frac{7}{8} \sin 2x + \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nt}{n^2} \frac{7}{8} \sin 2t\, dt \right] =$$

$$= \frac{37}{32} \sin 2x = \frac{3}{4} \varphi_1 + \frac{1}{2} \sin 2x, \text{ etc.}$$

En général $\varphi_{n+1}(x) = \frac{3}{4} \varphi_n(x) + \frac{1}{2} \sin 2x$. D'où

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{n+1}(x) = \frac{3}{4} \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) + \frac{1}{2} \sin 2x$$

ou $\varphi(x) = \frac{3}{4} \varphi(x) + \frac{1}{2} \sin 2x$ de sorte que $\varphi(x) = 2 \sin 2x$. Par substitution immédiate $\varphi(x) = 2 \sin 2x$, on se convainc qu'il s'agit bien de la solution.

336. On choisit $\varphi_0(x) = \cos 3\pi x$ et $\lambda = 1$ ($\lambda > 0$). On obtient itérativement $\varphi(x) = \pi^2 \cos 3\pi x$, solution de l'équation proposée.

337. $\varphi_3(x) = 6x^2 + 1$ (solution exacte).

338. $\varphi_3(x) = 1$ (solution exacte). **339.** $\varphi_3(x) = 1$ (solution exacte).

340. $\lambda_1 = 5\frac{1}{7}$ (la valeur exacte est $\lambda_1 = 5$).

341. $\lambda_1 = 2{,}486$; $\lambda_2 = 32{,}181$.

342. $\lambda_1 = 4{,}59$. **343.** $\lambda_1 = 3$. **344.** $\lambda_1 = 5$.

345. $\lambda_1 = 4{,}19$. **346.** $\lambda_1 = 5{,}78$. **347.** $\lambda_1 = 3$.

348. $\lambda_1 = 4$. **349.** $\lambda_1 = 2{,}475$. **350.** $\lambda_1 = 4{,}998$.

ANNEXE 1

FONCTIONS SPÉCIALES

1. On appelle *polynômes de Legendre* et on note $P_n(x)$ des polynômes définis par la formule

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Comme $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, on obtient par la formule de récurrence $(n+1) P_{n+1}(x) = x(2n+1) P_n(x) - nP_{n-1}(x)$ un polynôme de Legendre de tout degré n ($n = 2, 3, \ldots$).

La fonction génératrice des polynômes de Legendre s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot t^n, \quad 0 < t < 1, \quad |x| \leqslant 1,$$

et ils ont pour carré de la norme

$$\| P_n(x) \|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

2. On appelle *polynômes de Tchebycheff-Laguerre* et on note $L_n(x)$ des polynômes définis par la formule

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

La formule de récurrence

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 1)$$

permet d'obtenir des polynômes de tout degré n connaissant $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = 1 - x$. La fonction génératrice de ces polynômes est de la forme

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \cdot t^n,$$

et le carré de la norme s'écrit

$$\| L_n(x) \|^2 = (n!)^2.$$

ANNEXE 2

PROGRAMME DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FREDHOLM DE SECONDE ESPÈCE

par A. Rakitski et G. Makarenko

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{1}$$

où $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $a \leqslant x,\ t \leqslant b$, et λ un nombre donné.

Substituons à (1) un système de n équations algébriques linéaires à n inconnues $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, . . ., $\varphi(x_n)$:

$$\varphi(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m K(x_k, x_m)\, \varphi(x_m) = f(x_k), \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2}$$

Les quantités $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, . . ., $\varphi(x_n)$ sont les valeurs approchées de $\varphi(x)$, solution de (1), aux points de base x_1, x_2, . . ., x_n, où

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \ldots, \quad x_n = a + (n-1)\, h, \quad h = \frac{b-a}{n-1}. \tag{3}$$

Valeurs des coefficients A_m:

a) formule des trapèzes:

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = h; \tag{4}$$

b) formule de Simpson $(n = 2l + 1)$:

$$A_1 = A_{2l+1} = \frac{h}{3}, \quad A_2 = A_4 = \ldots = A_{2l} = \frac{4h}{3}, \quad A_3 = A_5 = \ldots = A_{2l-1} = \frac{2h}{3}. \tag{5}$$

Pour résoudre l'équation (1) sur calculatrice, on a rédigé en FORTRAN le sous-programme FUMEKS appelé par l'instruction CALL:

CALL FUMEKS (N, M, K, C, TX, TA, TK, TF, TR)

Le sous-programme FUMEKS permet de résoudre simultanément k équations du type (1) qui ne diffèrent que par leur second membre. Voici les paramètres formels du s/programme FUMEKS:

N = nombre de points de base,

K = nombre d'équations de la forme (1) ne différant les unes des autres que par leur second membre,

M = N + K,

C = λ,

TX = tableau unidimensionnel de dimension N où l'on renvoie, avant de faire appel au s/programme FUMEKS, les points de base x_k, $k = 1, 2, \ldots, N$,

TA = tableau unidimensionnel de dimension N où l'on doit renvoyer, avant d'appeler le s/programme FUMEKS, les valeurs des coefficients A_m, $m = 1, 2, \ldots,$ N, des formules de quadrature,

TK = tableau bidimensionnel de dimension (N, N) où l'on doit renvoyer, avant de faire appel au s/programme FUMEKS, les valeurs de $K(x_k, x_m)$, $1 \leqslant k, m \leqslant$ N, où k est le numéro de la ligne et m celui de la colonne de TK,

TF = tableau bidimensionnel de dimension (N, K) où l'on doit renvoyer, avant qu'on appelle le s/programme FUMEKS, les valeurs des seconds membres de (1) aux points de base (3),

TR = tableau bidimensionnel de dimension (N, M) contenant, après qu'on a appelé le s/programme FUMEKS, les solutions de l'équation (1) (la i-ième colonne renferme la solution correspondant au i-ième second membre de (1) dont les valeurs numériques figurent dans la i-ième colonne du tableau TF ($i = 1, 2, \ldots,$ K)).

Ci-dessous les sous-programmes FUMEKS et SYSTEM écrits en FORTRAN. Le s/programme SYSTEM permet de résoudre par la méthode de Gauss les systèmes d'équations algébriques linéaires. Il est appelé automatiquement à partir du s/programme FUMEKS.

```
      SUBROUTINE FUMEKS (N, M, K, C, TX, TA, TK,
     TF, TR)                                          F 1
      DIMENSION TX (N), TA (N), TK (N, N), TF (N, K),
     TR (N, M)                                        F 2
      DO 10 I = 1, N                                  F 3
      DO 5 J = 1, N                                   F 4
    5 TR (I, J) = —C * TA (J) + TK (I, J)             F 5
   10 TR (I, I) = TR (I, I) + 1                       F 6
      I = N * K                                       F 7
      J = N * N                                       F 8
      DO 15 L = 1, I                                  F 9
```

```
      J = J + 1                                                    F 10
   15 TR (J) = TF (L)                                              F 11
      CALL SYSTEM (TR, N, M, D)                                    F 12
      RETURN                                                       F 13
      END                                                          F 14
      SUBROUTINE SYSTEM (A, N, M, D)                               S  1
      DIMENSION A (N, M)                                           S  2
      D = 1.                                                       S  3
      N 1 = N — 1                                                  S  4
      DO 30 I = 1, N 1                                             S  5
      MAX = I                                                      S  6
      AMAX = ABS (A (I, I))                                        S  7
      K = I + 1                                                    S  8
      DO 5 L = K, N                                                S  9
      IF (AMAX — ABS (A (L, I))) 3, 5, 5                           S 10
    3 AMAX = ABS (A (L, I))                                        S 11
      MAX = L                                                      S 12
    5 CONTINUE                                                     S 13
      IF (I — MAX) 7, 12, 12                                       S 14
    7 DO 10 L = I, M                                               S 15
      S = A (I, L)                                                 S 16
      A (I, L) = A (MAX, L)                                        S 17
   10 A (MAX, L) = S                                               S 18
   12 D = D * A (I, I)                                             S 19
      IF (ABS (D) —.1 E — 17) 14, 16, 16                           S 20
   14 D = 0.                                                       S 21
      RETURN                                                       S 22
   16 SW = A (I, I)                                                S 23
      DO 20 L = I, M                                               S 24
   20 A (I, L) = A (I, L)/SW                                       S 25
      DO 25 L = K, N                                               S 26
      DO 25 J = K, M                                               S 27
   25 A (L, J) = A (L, J) — A (I, J) * A (L, I)                    S 28
   30 CONTINUE                                                     S 29
      D = D * A (K, K)                                             S 30
      IF (ABS (D) —.1 E — 17) 32, 34, 34                           S 31
   32 D = 0.                                                       S 32
      RETURN                                                       S 33
```

```
34 N 2 = K + 1                                          S 34
   DO 50 I = N 2, M                                     S 35
   A (K, I) = A (K, I)/A (K, K)                         S 36
   DO 50 J = 1, N 1                                     S 37
   NS = K — J                                           S 38
   NE = NS + 1                                          S 39
   DO 40 L 1 = NE, K                                    S 40
40 A (NS, I) = A (NS, I) — A (NS, L 1) * A (L 1, I)     S 41
50 CONTINUE                                             S 42
   L = K ** 2                                           S 43
   K = K * (M — K)                                      S 44
   DO 60 I = 1, K                                       S 45
   J = L + 1                                            S 46
60 A (I) = A (J)                                        S 47
   RETURN                                               S 48
   END                                                  S 49
```

Exemple. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_0^{\pi} t \cos^2 x \varphi(t)\, dt = \sin x - \frac{\pi}{4}(4-\pi)\cos^2 x - 0{,}5, \qquad (6)$$

en appliquant la formule de quadrature de Simpson et en choisissant les points de base suivants:

$$x_k = \frac{\pi k}{16}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 16.$$

Comparer le résultat obtenu avec la solution exacte connue de l'équation (6):

$$\varphi(x) = \sin x - 0{,}5.$$

Solution. Le programme RIUF ci-dessous résout l'équation proposée et édite le résultat sous forme du tableau.

```
   PROGRAM RIUF                                         R 1
   DIMENSION TX (17), TA (17), TK (17, 17), TF (17, 1),
   TR (17, 18), TR (51)                                 R 2
   H = 3,141593/16.                                     R 3
   TX (1) = 0.                                          R 4
   DO 5 I = 2,17                                        R 5
 5 TX (I) = TX = (I — 1) + H                            R 6
   TA (1) — H/3.                                        R 7
   DO 10 K = 2, 16, 2                                   R 8
```

```
      TA (K) = 4. * H/3.                                          R  9
10    TA (K + 1) = 2. * H/3.                                      R 10
      TA (17) = TA (1)                                            R 11
      DO 15    K = 1, 17                                          R 12
      TF (K) = SIN (TX (K)) —.785398 * (4.—
— 3.141593) * COS (TX (K)) ** 2 —.5                               R 13
      DO 15    M = 1, 17                                          R 14
15    TK (K, M) = TX (M) * COS (TX (K)) ** 2                      R 15
      CALL FUMEKS (17, 18, 1, 1., TX, TA, TK, TF, TR)             R 16
      L = 0                                                       R 17
      DO 20 K = 3, 51, 3                                          R 18
      L = L + 1                                                   R 19
      TP (K — 2) = TX (L)                                         R 20
      TP (K — 1) = TR (L)                                         R 21
20    TP (K) = SIN (TX (L)) — .5                                  R 22
      PRINT 30, TP                                                R 23
30    FORMAT 1/H 1,37 (H —)/2H, I, 11X,
      12 HI SOLUTION, 13 HI SOLUTION EXACTE I/                    R 24
      * 2 H I, 5 X, HX, 5 X, HI, 11 X, 13 HI,
      SOLUTION I/1 X, 37 (H —)/                                   R 25
      M 17 (2 H I, 3 (F 10. 6, 2 HI)/1 X, 37 (H —)/))            R 26
      END                                                         R 27
```

x	Solution	Solution exacte
0.000000	—0.500018	—0.500000
0.196350	—0.304927	—0.304910
0.392699	—0.117332	—0.117317
0.589049	0.055558	0.055570
0.785398	0.207098	0.207107
0.981748	0.331464	0.331470
1.178097	0.423877	0.423880
1.374447	0.480785	0.480785
1.570796	0.500000	0.500000
1.767146	0.480785	0.480785
1.963496	0.423877	0.423879
2.159845	0.331464	0.331469
2.356195	0.207098	0.207107
2.552544	0.055558	0.055570
2.748894	—0.117332	—0.117317
2.945243	—0.304927	—0.304910
3.141503	—0.500018	—0.500000

REMARQUE. Un lecteur initié à la programmation en langage FORTRAN peut rédiger des programmes analogues pour n'importe quelle équation de la forme (1). On prend les points de base en nombre arbitraire et on utilise à son gré soit la formule des trapèzes, soit (comme dans le programme RIUF) la formule de quadrature de Simpson.

Notons que le programme RIUF peut faire l'affaire dans le cas d'autres équations concrètes du type (1) si le segment $[a, b]$ est à 17 points. On l'utilise à condition de remplacer les opérateurs

R3, R4, R13, R15, R16, R22.

L'opérateur R3 assigne à la variable H la valeur $\frac{b-a}{n-1}$. L'opérateur R4 transfère en tête du tableau TX une quantité égale à la valeur du premier point de base.

On écrit au second membre de R13 l'expression arithmétique correspondant au second membre de (1).

L'opérateur R15 calcule l'expression arithmétique correspondant au noyau K (x, t) de l'équation (1).

Dans l'opérateur R16 on prend pour quatrième paramètre la quantité λ ($\lambda = 1$ dans notre cas).

Enfin, l'opérateur R22 calcule la valeur exacte en tous les points de base. Si la formule donnant la solution exacte fait défaut, on peut par exemple faire en tous les points

$$\varphi(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 17.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1960.

[2] Краснов М. Л., Интегральные уравнения. Введение в теорию, « Наука », 1975.

[3] Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И., Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости, « Наука », 1971.

[4] Макаренко Г. И., Ракитский А. В., Салтыков А. И., ФОРТРАН, « Знание », 1973.

[5] Мышкис А. Д., Математика для втузов. Специальные курсы, « Наука », 1971.

[6] Привалов И. И., Интегральные уравнения, ОНТИ, 1937.

[7] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, «Наука », 1966.

[8] Цлаф Л. Я., Вариационное исчисление и интегральные уравнения, « Наука », 1970.

[9] Angot A., Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications, Paris 1957.

[10] Courant R., Hilbert D., Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1, Berlin 1924-1937.

[11] Goursat E., Cours d'analyse mathématique, t. III, Paris 1956.

[12] Guelfand I., Chilov G., Les distributions, Paris 1962-1967.

[13] Günter N. M., Kusmin R. O., Aufgabensammlung zur höheren Mathematik, Berlin 1966.

[14] Ince E. L., Ordinary Differential Equations, London 1927.

[15] Kantorovich L. V., Krylov V. I., Approximate methods of higher analysis, Groningen 1958.

[16] Lalesco T., Introduction à la théorie des équations intégrales, Paris 1912.

[17] Lovitt W. V., Linear integral equations, New York 1950.

[18] Michlin S. G., Vorlesungen über lineare Integralgleichungen, Berlin 1962.

[19] Michlin S. G., Smolizki Ch., Näherungsmethoden zur Lösung von Differential- and Integral- gleichungen, Leipzig 1969.

[20] Mikhlin S. G., Integral equations and their applications to certain problems in mecanics, mathematical physics and technology, London 1957.

[21] Morse Ph. M., Feshbach H., Methods of theoretical physics, New York 1953.

[22] Petrovsky I. G., Lectures on the theory of integral equations, Moscow 1971.

[23] SANSONE G., Equazioni differenziali nel campo reale, p. 1-2, Bologna 1948-1949.
[24] SCHMEIDLER W., Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig 1955.
[25] SCHWARTZ L., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Paris 1961.
[26] SMIRNOV V., Cours de mathématiques supérieures, t. IV, Moscou 1975.
[27] TITCHMARSH E., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford 1937.
[28] TRICOMI F., Integral Equations, New York 1957.
[29] VLADIMIROV V. et coll., Recueil de problèmes d'équations de la physique mathématique, Moscou 1975.
[30] WIARDA G., Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen, Leipzig 1930.

TABLE DES MATIÈRES

Préliminaires 7

Chapitre premier. ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA 13

§ 1. Notions fondamentales 13
§ 2. Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra 16
§ 3. Résolvante de l'équation intégrale de Volterra. Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes 19
§ 4. Intégrales euléeriennes 26
§ 5. Equation intégrale d'Abel et sa généralisation 29

Chapitre II. ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FREDHOLM 34

§ 6. Notions fondamentales 34
§ 7. Méthode de Fredholm 38
§ 8. Noyaux itérés. Construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés 43
§ 9. Equations intégrales à noyau dégénéré 54
§ 10. Nombres caractéristiques et fonctions propres 59
§ 11. Résolution des équations intégrales homogènes à noyau dégénéré 76
§ 12. Equations symétriques non homogènes 77
§ 13. Alternative de Fredholm 84
§ 14. Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles ordinaires 92
§ 15. Résolution de problèmes aux limites à l'aide de la fonction de Green 104
§ 16. Problèmes aux limites dépendant d'un paramètre et leur réduction à des équations intégrales 107

Chapitre III. APPLICATION DES TRANSFORMATIONS INTÉGRALES À LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS INTÉGRALES 111

§ 17. Résolution d'équations intégrales par la transformation de Fourier 111
§ 18. Résolution d'équations intégrales par la transformation de Laplace 118
1. Equations intégrales de Volterra du type convolution 118
2. Systèmes d'équations intégrales de Volterra du type convolution 121
3. Equations intégro-différentielles 124
4. Equations intégrales de Volterra sur l'intervalle $(x, +\infty)$ 126
5. Théorème géréralisé du produit et certaines applications . . 128
§ 19. Résolution d'équations intégrales par la transformation de Mellin 130

Chapitre IV. ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE . . 135

§ 20. Equations intégrales de Volterra de première espèce 135
§ 21. Equations intégrales de Volterra de première espèce du type convolution 137
§ 22. Equations intégrales de Fredholm de première espèce 143

Chapitre V. MÉTHODES DE RÉSOLUTION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES 152

§ 23. Remplacement du noyau d'une équation intégrale par un noyau dégénéré 152
§ 24. Remplacement de l'intégrale par une somme finie 156
§ 25. Méthode des approximations successives 159
1. Equations intégrales de Volterra de seconde espèce 159
2. Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce 165
3. Equations intégrales de Fredholm de première espèce . . . 167
§ 26. Méthode de Boubnov-Galerkin 169
§ 27. Recherche des nombres caractéristiques et des fonctions propres des noyaux symétriques 171
1. Méthode de Ritz 171
2. Méthode des traces 173
3. Méthode de Kellogg 175

RÉPONSES 180

Annexe 1. FONCTIONS SPÉCIALES 198

Annexe 2. PROGRAMME DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FREDHOLM DE SECONDE ESPÈCE 199

BIBLIOGRAPHIE 205

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse :
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique